
Hosted by Google

Lehrbuch

der

Analytischen Geometrie.

Erster Theil:

Analytische Geometrie der Ebene.

Von

Professor Dr. O. Dziobek
Etatsmässiger Lehrer an der Vereinigten Artillerie- und Ingenieurschule
und Docent für höhere Mathematik an der Technischen Hochschule
zu Berlin.

Mit 85 Figuren im Text.

Berlin 1900
Verlag von Hans Th. Hoffmann
Ges. m. b. H.



Vorwort.

Der Verfasser dieses Lehrbuches der analytischen Geometrie, von welchem hier der erste Theil — die Ebene — vorliegt, und dessen zweiter Theil — der Raum — im Laufe des nächsten Jahres erscheinen soll, wirkt seit 18 Jahren als Lehrer der höheren Mathematik an der Technischen Hochschule zu Berlin. Er kennt also Umfang und Art des mathematischen Betriebes an derartigen Anstalten und hat sich bei der Ausarbeitung darnach gerichtet.

Der Zweck des mathematischen Unterichts an technischen Hochschulen ist, wenigstens in Deutschland, ein anderer als an den Universitäten. Hier ist innerhalb festgesteckter Grenzen eine solche Durcharbeitung anzustreben, dass dem Studirenden das Gelernte zu einem handlichen Werkzeug wird, jeden Augenblick und bei jeder Gelegenheit zur Anwendung, zum Wirken und Schaffen bei technischen Problemen bereit und fertig. Dort dagegen ist die mathematische Forschung, die Schaffung immer neuer, tiefsinnig erdachter Verknüpfungen von Zahl und Raum Selbstzweck, mag sie auch in weit entlegene Gebiete führen, wo zur Zeit an eine Anwendung irgend welcher Art überhaupt nicht gedacht wird.

Dieses Lehrbuch will das erstere. Freilich wird wohl auch der Techniker nicht mehr verlangen dürfen, als jener ungeduldige König, der sich sagen lassen musste, dass es selbst für ihn keinen besonderen Weg zur Mathematik gebe. Denn obgleich hier das Hauptziel eine gründliche Kenntniss von für den Gebrauch bereit gestellten Formeln ist, so wird doch dieses Ziel nur erreicht werden können, wenn die Formeln den Grundsätzen einer richtigen Lehrmethode entsprechend, also

im Zusammenhang als aus der Tiefe geschöpfte Wahrheiten entwickelt werden. So hoffe ich, wird auch dieses Buch dem Leser auf jeder Seite wirklich „lehrhaft“ entgegentreten und wenn es ihn deshalb vielleicht auch seines Inhaltes selbst wegen anregen und geistig fördern sollte, so wird das wohl weiter keinen Schaden anrichten.

Der Verfasser ist überzeugt, dass sich dieses Buch auch für den eben der Schule entwachsenen Jünger der Mathematik an der Universität zum ersten Eindringen in die analytische Geometrie durchaus eignen wird. Denn ihm wieder wird es nur zum Vortheil gereichen, dass er hier an zahlreichen Stellen mehr auf praktische Anwendungen hingewiesen wird, als es sonst an der Universität der Fall zu sein pflegt. Dazu kommt, dass die naturgemäss breitere und gründlicher ausgearbeitete Darstellung der „Elemente“ zur Befestigung in ihrem Besitz beiträgt, der ohne Frage die beste Gewähr für den Erfolg weiter gehenden Studiums bietet.

Zum mindesten aber setzt das Buch einen Leser voraus, der sich ehrlich und ernsthaft unterrichten lassen will. Denn es verlangt von ihm durchweg eigenes und gründliches Nachdenken und täuscht niemals über wirkliche Schwierigkeiten hinweg, sondern macht eher mehr als andere Bücher dieser Art auf solche aufmerksam und zeigt, wie man mit ihnen fertig werden kann.

Der gebotene Stoff deckt sich ungefähr mit dem in meinen Vorlesungen behandelten, so weit sie die analytische Geometrie betreffen. Dabei habe ich indessen hier eine solche Durcharbeitung angestrebt, dass dieses Buch, wie ich hoffe, noch nach jahrelanger Arbeit im Dienste der Praxis, bei welcher die mathematischen Gebilde wohl langsam verblassen, als zuverlässiger Rathgeber befunden werden kann.

In einem, allerdings bedeutsamen Punkte aber bin ich hier weiter gegangen. Ich meine in der Theorie der

Projektivität und Perspektivitäut und in der sich daran (im letzten Abschnitt) anschliessenden Darstellung der Lehre von den Dreieckskoordinaten nebst ihrer Anwendung auf eine umfassende Theorie der Kurven zweiter Ordnung. Ich habe dabei mit der Thatsache gerechnet, dass die Studirenden der Technischen Hochschulen ausser der analytischen Geometrie auch sehr viel darstellende Geometrie in Verbindung mit synthetischer Geometrie treiben und es daher den weiter Vorgeschrittenen wohl willkommen sein mag, in meinem Buch eine Art Brücke zwischen beiden, so grundverschiedenen Behandlungsarten der Geometrie zu finden.

Die jedem Paragraphen angefügten Uebungsaufgaben, deren Lösungen man hinten in knapper Form findet, sind durchaus nicht „zurecht gemacht". Denn sie sollen weder zu überraschend einfachen Ergebnissen führen, noch auf andere Weise blenden oder Staat machen. Vielmehr soll der Leser sich an ihnen wirklich üben in der Anwendung des Gelernten, wobei ich es so eingerichtet habe, dass zum Theil recht umfangreiche ziffernmässige Rechnungen zu leisten sind, da nach meiner Meinung eine gründliche Uebung hierin dem angehenden Techniker sehr zu statten kommt.

Und nun, mein Buch, tritt heraus aus der engen Studirstube und der Werkstatt des Druckers, zeige dich im Lichte vor den kritischen Blicken meiner Fachgenossen wie vor den meist noch kritischeren der studirenden Jugend und erwirb, wenn du kannst, Leser, Anerkennung und Freunde; Freunde, welche dir bei einer etwaigen neuen Auflage mit wohlmeinenden Rathschlägen zur Seite stehen.

Charlottenburg, den 20. August 1900.

Prof. Dr. O. Dziobek.

Inhaltsverzeichniss.

Erster Abschnitt. § 1—5.

Zweiter Abschnitt. § 6—11.

Dritter Abschnitt. § 12—18.

Vierter Abschnitt. § 19—26.

Anhang.

Erster Abschnitt.

§ 1—5.

§ 1.

Die analytische Geometrie der geraden Linie. Das einfache Verhältniss zwischen drei Punkten und das Doppelverhältniss zwischen vier Punkten einer geraden Linie. Lineare Substitutionen.

Wie die Geometrie allgemein in Planimetrie und Stereometrie geschieden wird, so pflegt man auch die analytische Geometrie in eine solche der Ebene und eine solche des Raumes zu theilen. Doch sind beide Theile nicht nur, wie der Name sagt, „analytisch", sondern auch auf dasselbe Grundprinzip gestellt, nur dass es einmal auf ein zweidimensionales Gebilde — die Ebene —, das anderemal auf ein dreidimensionales — den Raum selbst — Anwendung findet. Logisch begründet ist es aber, zuerst ein eindimensionales Gebilde — die gerade Linie — analytisch zu behandeln. Und es verlohnt sich, die analytische Geometrie der geraden Linie, welche zwar häufig, aber mit Unrecht ganz übergangen wird, als Einleitung vorauszuschicken, um das Grundprinzip im allereinfachsten Falle hervortreten zu lassen und die wichtigen Begriffe des einfachen und Doppelverhältnisses zu erläutern.

Eine gerade Linie dehnt sich in jeder ihrer beiden Richtungen unbegrenzt weit aus; und sie soll daher hier weder durch einen Punkt einseitig begrenzt, noch durch zwei Punkte ganz begrenzt als Strecke, sondern in ihrer unendlichen Ausdehnung nach beiden Seiten genommen werden. Es leuchtet ein, dass es dann für keinen Punkt der geraden Linie eine absolute Lagenbestimmung geben kann, dass vielmehr nur relative Lagenbestimmungen möglich sind, d. h. Bestimmungen

der *Lage von Punkten zu einander.* Wenn in der gezeichneten Linie zwei Punkte P und Q gegeben werden, so sind zur Feststellung ihrer relativen Lage zwei Angaben nöthig, nämlich:

P Q

Fig. 1.

erste Angabe: Entfernung von P bis Q,
zweite Angabe: Richtung von P nach Q (ob von links nach rechts, oder von rechts nach links).

Werden aber mehr als zwei — etwa n — Punkte betrachtet, so ist es offenbar nicht nöthig, die Lage jedes Punktes zu jedem andern anzugeben, weil augenscheinlich diese Angaben nicht von einander unabhängig sind. So sei z. B. für die Punkte P, Q, R folgendes gegeben:

P Q R
←12mm→←15mm→

Fig. 2.

1a) Entfernung $PQ = 12$ mm
2a) Richtung von P nach Q geht von links nach rechts } Lage von P zu Q.

1b) Entfernung $PR = 27$ mm
2b) Richtung von P nach R geht von links nach rechts } Lage von P zu R.

Es folgt sofort:

3a) Entfernung $QR = 15$ mm $= (27 - 12)$ mm
3b) Richtung von Q nach R geht von links nach rechts } Lage von Q zu R.

Also: *Aus der Lage zweier Punkte (Q und R) zu demselben dritten Punkt (P) folgt auch ihre Lage zu einander.*

Diesen so einfachen Satz, dessen Richtigkeit die Anschauung selbst lehrt, hat Cartesius als Grundstein der analytischen Geometrie benutzt. Denn, wenn die Lagen aller Punkte der geraden Linie auf einen *einzigen* bezogen werden, der beliebig herausgegriffen worden sein mag, so verschafft man sich hiernach eine einheitlich geregelte Lagenbestimmung, die vollkommene Einfachheit und vollkommene Bestimmtheit in sich vereint.[1]) Der herausgegriffene Punkt,

[1]) Diese Art der Lagenbestimmung ist zwar weit älteren Datums, da bekanntlich in der Astronomie und Geographie (Länge und Breite) schon seit Jahrtausenden von ihr Gebrauch gemacht wurde; Cartesius indessen gebührt das hohe Verdienst, sie als Grundlage für eine neue Methode der Geometrie benutzt zu haben.

der sogenannte Anfangspunkt oder Nullpunkt, gewöhnlich mit O bezeichnet, giebt der analytischen Geometrie ihr eigenthümliches Gepräge.

Noch aber sind zwei Festsetzungen nöthig, um diese Geometrie zur „analytischen“ zu machen. Die eine ist uralt; man drückt die Entfernungen, wie überhaupt alle messbaren Grössen vermittelst einer Masseinheit nnd deren Unterabtheilungen durch Zahlen aus. Ist die Längeneinheit bekannt, so mag sie bei Angabe der Entfernungen weggelassen werden, worauf man mit ihnen rechnen kann, wie mit reinen Zahlen.

Die zweite Festsetzung dagegen hat Cartesius selbst getroffen und damit der analytischen Geometrie erst ihre hohe Bedeutung gesichert. Man bezeichne nach ihm die eine der beiden Richtungen der Linie als positiv (+), die andere als negativ (—) und gebe der Zahl, welche die Entfernung von P bis Q ausdrückt (P Anfangspunkt, Q Endpunkt) das Vorzeichen +, wenn die Richtung von P nach Q Positivrichtung ist, und das Vorzeichen — im entgegengesetzten Falle, so dass hiernach nicht $PQ = QP$, sondern $PQ = -QP$. Durch diese Umformung aus einer absoluten in eine algebraische (mit einem Vorzeichen versehene) Zahl werden die beiden Angaben der Entfernung und der Richtung zu einer einzigen vereinigt. Wendet man dies auf den Anfangspunkt O an, indem man von ihm bis zu irgend einem Punkte P geht, so wird die so mit einem Vorzeichen versehene und mittelst der Längeneinheit durch eine Zahl ausgedrückte Entfernung gewöhnlich mit x bezeichnet und Abscisse des Punktes P genannt. (Fig. 3).

Fig. 3. — O P + x

Um also diese Abscisse, dieses x völlig eindeutig bestimmen zu können, müssen folgende Entscheidungen vorangegangen sein:

1. Welchen Punkt man als Anfangspunkt O wählt.
2. Welche Länge man als Längeneinheit wählt.
3. Welche Richtung man als positiv, welche als negativ wählt.

Diese Entscheidungen sind der Theorie nach ganz willkürlich und daher nach praktischen Gesichtspunkten zu treffen.

Den Nullpunkt O wird man in der Nähe der in Betracht kommenden Punkte wählen, womöglich so, dass alle Abscissen positiv werden. Auch die Längeneinheit wird man angemessen nehmen, nicht zu gross, nicht zu klein, und endlich ist die etwa bevorzugte unter den beiden Richtungen als positive einzuführen. In den Lehrbüchern der analytischen Geometrie pflegt man die Richtung, in welcher wir schreiben — also von links nach rechts — als positiv zu nehmen; dies ist auch hier überall geschehen.[1])

So hat jeder Punkt seine Abscisse, sein x — $P(x)$ —. Der Anfangspunkt hat die Abscisse $x = O$, alle Punkte links von ihm haben negative, rechts positive Abscissen. Und es erscheint jetzt die kontinuirliche Punktreihe in der geraden Linie als Sinnbild, als geometrische Veranschaulichung der stetigen Zahlenreihe. Wie es zwischen zwei Punkten keine Unterbrechung giebt, ihre Verbindung vielmehr nur einen einzigen Zug bildet, so ist auch von einer Zahl zur anderen kein sprungweiser, sondern ein stetiger Uebergang, vorausgesetzt natürlich, dass man die Brüche und Irrationalzahlen zwischen die ganzen Zahlen einschaltet.

Sind mehrere Punkte zu betrachten, so unterscheidet man ihre Abscissen meist durch angehängte Indices, z. B. P_1 (x_1), P_2 (x_2), P_3 (x_3) etc. Auch wählt man zuweilen andere Buchstaben, x, X, ξ etc.

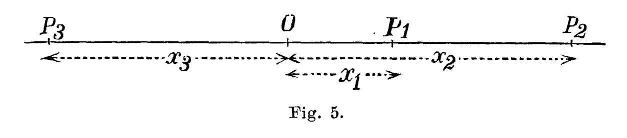


Fig. 5.

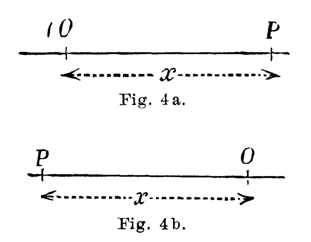


Fig. 4a. Fig. 4b.

[1]) Der Anfänger halte nun unverrückbar fest im Auge, bis es ihm völlig selbstverständlich ist, dass die Abscisse x eines Punktes keine absolute Zahl, etwa $= 3$ ist, sondern ein Vorzeichen besitzt, also etwa $x = +3$ (Fig. 4a), oder $x = -3$ (Fig. 4b). Es ist daher auch grundfalsch, die Abscisse eines Punktes, der links von O liegt, mit $-x$ zu bezeichnen. Das Vorzeichen steckt eben in dem x schon drin.

Grundaufgabe der analytischen Geometrie der geraden Linie: Gegeben zwei Punkte $P_1 (x_1)$, $P_2 (x_2)$, gesucht die Entfernung von P_1 nach P_2 der Grösse und Richtung nach.

Lösung:

In Fig. 6a ist $P_1 P_2 = + [(+x_2) - (+x_1)] = x_2 - x_1 = (+31) - (+19) = +12$

Fig. 6a. Fig. 6b.

In Fig. 6b ist $P_1 P_2 = - [(+x_1) - (+x_2)] = x_2 - x_1 = (+19) - (+31) = -12$

„ „ 6c „ $P_1 P_2 = - [(+x_1) + (-x_2)] = x_2 - x_1 = (-19) - (+12) = -31$

Fig. 6c. Fig. 6d.

In Fig. 6d ist $P_1 P_2 = + [(+x_2) + (-x_1)] = x_2 - x_1 = (+12) - (-19) = +31$

„ „ 6e „ $P_1 P_2 = - [(-x_2) - (-x_1)] = x_2 - x_1 = (-31) - (-12) = -19$

Fig. 6e. Fig. 6f.

In Fig. 6f ist $P_1 P_2 = + [(-x_1) - (-x_2)] = x_2 - x_1 = (-12) - (-31) = +19$

Anmerkung 1. Das erste Vorzeichen (vor den eckigen Klammern) entspricht der Richtung von P_1 nach P_2, die Vorzeichen innerhalb der runden Klammern verwandeln je nach der Figur die Abscissen in ihre absoluten Werthe. Wer fälschlicher Weise diese Vorzeichen vernachlässigt (eine Gefahr, die zu Anfang sehr nahe liegt), würde nur das fettgedruckte Zeichen nehmen, welches kein Vorzeichen ist, sondern andeutet, dass die betreffenden Strecken (ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen) zu addiren oder zu subtrahiren sind. Er würde also der Reihe nach erhalten:

$$x_2 - x_1,\ x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2 + x_1,\ x_2 - x_1,\ x_1 - x_2$$

und doch wäre das Resultat nur in Fig. 6a und 6e richtig und in allen anderen Fällen falsch. Denn in Fig. 6c ist eben x_1 nicht $= 12$, sondern $= + 12$ (mm) und x_2 nicht $= 19$, sondern $= - 19$, $x_2 + x_1$ wäre also $= (+12) + (-19) = -7$, während die Entfernung $P_1 P_2$ offenbar ohne Vorzeichen $= 31$, mit dem Vorzeichen $= -31$ ist.

Anmerkung 2. Wenn diese Aufgabe zeigt, wie man sich der Thatsache, dass die x und die Entfernungen überhaupt algebraische Zahlen sind, anbequemen muss, so zeigt sie doch andererseits den ausserordentlichen Vortheil, der damit erreicht wird. Denn wie nun auch die drei Punkte liegen, immer gelangt man zu derselben Formel, nämlich

$$P_1 P_2 = x_2 - x_1 \qquad 1)$$

= Abscisse des Endpunktes — Abscisse des Anfangspunktes.

Dieser Vortheil, der die oft so lästige und zeitraubende Unterscheidung verschiedener Lagen erspart, zeigt sich, wie hier ein für alle mal bemerkt werden mag, stets bei einer strengen Durchführung des Vorzeichens, wo ein solches angebracht erscheint. Also immer nur eine einzige Formel!

Der Ausdruck $x_2 - x_1$ heifst auch relative Abscisse von P_2 in Bezug auf P_1 weil er die Abscisse von P_2 wird, wenn man P_1 zum Anfangspunkt nimmt. Bezeichnet man dann P_1 mit O_1 und seine Abscisse nunmehr einfach mit a, bezeichnet ferner P_2 mit P und seine Abscisse in Bezug auf O mit x, auf O_1 mit ξ, so folgt nach 1)

Fig. 7.

$$\xi = x - a,\ x = a + \xi \qquad 2)$$

womit der Uebergang von einem Anfangspunkt zum andern, die sogenannte Abscissentransformation angezeigt wird. Wechselt man auch noch die Positivrichtung, so wird $\xi = -(x - a)$, $x = -(\xi - a)$.

Definition des einfachen Verhältnisses (Theilungsverhältnisses) zwischen drei Punkten. Unter dem Verhältniss von P_3 (x_3) zu P_1 (x_1) und P_2 (x_2) versteht man das Verhältniss der (mit Vorzeichen versehenen) Entfernungen des Punktes P_3 von P_1 und P_2. Nach 1) wird also dieses Verhältniss λ, für welches wir das Symbol ($P_1\ P_2\ P_3$) einführen wollen, durch die Formel bestimmt:

$$\lambda = \frac{P_3\,P_1}{P_3\,P_2} = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = (P_1\,P_2\,P_3). \qquad 3)$$

λ ist selbstverständlich, gleichwie x_1, x_2, x_3 eine algebraische Zahl. Es wird positiv oder negativ, je nachdem P_3 ausserhalb oder innerhalb $P_1\ P_2$ liegt. λ ist $= -1$, wenn P_3 mit der Mitte von $P_1\ P_2$ zusammenfällt, nimmt ab von -1 bis $-\infty$, wenn P_3 von dieser Mitte bis zu P_2 sich bewegt, springt beim Durchgang durch P_2 von $-\infty$ bis $+\infty$ und nimmt nun abermals ab, wenn P_3 über P_2 hinausgeht. Wenn sich P_3 sehr weit über P_2 hinaus entfernt hat, so wird sich λ dem Werthe $+1$ sehr genähert haben. Diese Näherung ist offenbar unbegrenzt, wie auch die Formel für λ zeigt, wenn sie so geschrieben wird:

$$\lambda = \frac{\frac{x_1}{x_3} - 1}{\frac{x_2}{x_3} - 1}.$$

Fig. 8

Setzt man hier für x_3 immer grössere und grössere Zahlen, was man durch das Symbol: $\lim x_3 = + \infty$ ausdrückt, so wird, da $\frac{1}{\infty} = 0$:

$$\lim_{\text{für } P_3 = P(+\infty)} \lambda = \frac{0-1}{0-1} = +1,$$

Derselbe limes entsteht, wenn sich P_3 über P_1 hinaus (wo $\lambda = 0$ wird) nach der anderen Seite weiter und weiter entfernt. Also auch:

$$\lim_{\text{für } P_3 = P(-\infty)} \lambda = +1.$$

Bemerkung. Man spricht von dem unendlich fernen Punkte, gleich als ob er wirklich eine angebbare Lage hätte und auch als ob es keinen Unterschied machte, ob man sich in der einen oder in der anderen Richtung unermesslich weit entfernt (als wenn die Gerade ein Kreis mit unermesslich grossem Radius wäre, der sich in der Unendlichkeit schliesst). Wenngleich der unendlich ferne Punkt nur begrifflich definirt werden kann und ihm eine reale Existenz nicht zukommt, so ist es doch angebracht, ihn in diesem Sinne einzuführen, dass nichts weiter gesagt werden soll, als dass sich der fragliche Punkt weiter und weiter entfernt und seine Abscisse immer grössere und grössere absolute Werthe erhält.

Eben sahen wir P_3 als beweglich, als veränderlich, als „laufend", P_1 und P_2 dagegen als gegeben, als „fest" an. In der Regel giebt man einem laufenden Punkt keinen Index, sondern bezeichnet ihn einfach mit P und seine Abscisse mit x, um damit anzuzeigen, dass dieses x eine „veränderliche Grösse", eine „Veränderliche" oder „Variable" sei. Dann wird aber auch λ veränderlich und die Gleichung zwischen beiden Veränderlichen x und λ lautet nach 3)

$$\lambda = \frac{x_1 - x}{x_2 - x}. \qquad \textbf{3a)}$$

Kehrt man diese Gleichung um durch Berechnung von x, so entsteht

$$x = \frac{x_1 - \lambda\, x_2}{1 - \lambda}, \qquad \textbf{4)}$$

eine Formel, welche anzuwenden ist, wenn umgekehrt λ ge-

geben und x gesucht werden soll. Wird z. B. $\lambda = -1$ gesetzt, d. h. soll P Mitte von P_1 und P_2 werden, so folgt

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

(d. i. die Abscisse der Mitte ist das arithmetische Mittel der Abscissen von Anfangs- und Endpunkt).

Für $\lambda = 0$ wird $x = x_1$, d. h. P fällt mit P_1 zusammen; für $\lambda = \pm\infty$ wird $x = \dfrac{\dfrac{x_1}{\lambda} - x_2}{\dfrac{1}{\lambda} - 1} = \dfrac{-x_2}{-1} = x_2$, d. h. P fällt mit P_2 zusammen. Setzt man endlich $\lambda = +1$, so wird: $x = \dfrac{x_2 - x_1}{0} = \pm\infty$, d. h. P fällt mit dem unendlich fernen Punkt zusammen, wie es sein muss etc.

Die sechs einfachen Verhältnisse zwischen drei Punkten. Durch Permutation der drei Punkte P_1, P_2, P_3 auf alle mögliche $1 \cdot 2 \cdot 3 = 3! = 6$ Arten können aus ihnen 6 Verhältnisse gebildet werden. Setzt man zur Abkürzung:

$$x_1 - x_2 = A_3,\ x_2 - x_3 = A_1,\ x_3 - x_1 = A_2 \qquad \textbf{5)}$$

(man beachte den Cyclus (1, 2, 3)! [auf 1 folgt 2, auf 2 folgt 3, auf 3 folgt 1], er wird sehr häufig wiederkehren) und bezeichnet zur Unterscheidung die 6 Verhältnisse der Reihe nach mit λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6, so giebt die Formel 3)

$$\left.\begin{array}{l} (P_2\,P_3\,P_1) = \lambda_1 = -\dfrac{A_3}{A_2} \\ (P_3\,P_1\,P_2) = \lambda_2 = -\dfrac{A_1}{A_3} \\ (P_1\,P_2\,P_3) = \lambda_3 = -\dfrac{A_2}{A_1} \end{array}\right\} \text{erste Gruppe, Cyclus } (1, 2, 3)$$

$$\left.\begin{array}{l} (P_3\,P_2\,P_1) = \lambda_4 = -\dfrac{A_2}{A_3} \\ (P_1\,P_3\,P_2) = \lambda_5 = -\dfrac{A_3}{A_1} \\ (P_2\,P_1\,P_3) = \lambda_6 = -\dfrac{A_1}{A_2} \end{array}\right\} \text{zweite Gruppe, Cyclus } (3, 2, 1). \qquad \textbf{6)}$$

Wie ersichtlich, entstehen alle 6 Verhältnisse, indem man aus A_1, A_2, A_3 alle möglichen Brüche wie $\dfrac{A_1}{A_2}, \dfrac{A_1}{A_3}$ etc.

bildet und vor alle das Zeichen — setzt. A_1, A_2, A_3 sind aber nicht von einander unabhängig, denn durch Addition der Gleichungen 5) erhält man auf der Stelle

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0. \qquad \mathbf{5\,a)}$$

Es kann daher eine dieser drei Grössen, z. B. $A_1 = -(A_2 + A_3)$ aus den Gleichungen 6) fortgeschafft werden (freilich würde dabei die Symmetrie verloren gehen). Also können die Verhältnisse durch einen Bruch $\frac{A_3}{A_2}$, somit auch durch ein Verhältniss $\lambda_1 = -\frac{A_3}{A_2}$ ausgedrückt werden, so dass wir den Satz haben:

Ist von den sechs Verhältnissen eines gegeben, so lassen sich die anderen aus ihm berechnen. Durch Ausführung dieser kleinen Rechnung erhält man:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\frac{A_3}{A_2} = \lambda_1 \\
\lambda_2 &= -\frac{A_1}{A_3} = \frac{A_2 + A_3}{A_3} = \frac{-1-\frac{A_3}{A_2}}{-\frac{A_3}{A_2}} = \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1} \\
\lambda_3 &= -\frac{A_2}{A_1} = +\frac{A_2}{A_2 + A_3} = \frac{1}{1+\frac{A_3}{A_2}} = \frac{1}{1-\lambda_1} \\
\lambda_4 &= \frac{1}{\lambda_1} \\
\lambda_5 &= \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1} \\
\lambda_6 &= \frac{1}{\lambda_3} = 1 - \lambda_1.
\end{aligned} \qquad \mathbf{7)}$$

Entsprechende Formeln ergeben sich, wenn alle λ durch λ_2, λ_3 etc. ausgedrückt werden. Nebenbei noch die Bemerkung, dass bei numerischer Berechnung von den 6 Verhältnissen stets 4 positiv, 2 negativ werden, z. B. $\lambda_1 = -\frac{2}{5}$, so $\lambda_2 = +\frac{7}{2}$, $\lambda_3 = +\frac{5}{7}$, $\lambda_4 = -\frac{5}{2}$, $\lambda_5 = +\frac{2}{7}$, $\lambda_6 = +\frac{7}{5}$.

Da sämmtliche 6 Verhältnisse durch eines von ihnen ausgedrückt werden können, so spricht man auch einfach von

dem Verhältniss zwischen drei Punkten, indem stillschweigend die Reihenfolge, in welcher sie genommen werden, als bekannt vorausgesetzt wird.

Die sechs Verhältnisse sind, wie das eben gegebene Beispiel zeigt, im allgemeinen von einander verschieden und zwei nach 6) zur selben Gruppe gehörende können nie einander gleich werden. Denn der Ansatz z. B.

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

giebt nach 7) die quadratische Gleichung

$$\lambda_1^2 - \lambda_1 + 1 = 0,$$

deren Wurzeln nicht reell sind $\left(\lambda_1 = \frac{+1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$.

Wohl aber kann ein Verhältniss der einen Gruppe denselben Werth erhalten wie ein Verhältniss der anderen Gruppe, und die leichte Untersuchung zeigt, dass ein solches Gleichwerden dann immer paarweise eintritt und nur drei verschiedene Verhältnisse bleiben. Denn es ergeben sich folgende Fälle:

1) Ein Punkt ist Mitte der beiden anderen, z. B. P_1 Mitte von P_2 P_3 ist. Dann wird

$$\lambda_1 = \lambda_4 = -1, \ \lambda_2 = \lambda_6 = +2, \ \lambda_3 = \lambda_5 = +\frac{1}{2}.$$

2) Zwei Punkte fallen zusammen, z. B. P_2 und P_3. Es wird dann

$$\lambda_1 = \lambda_4 = +1, \ \lambda_2 = \lambda_6 = 0, \ \lambda_3 = \lambda_5 = \pm\infty.$$

3) Ein Punkt, z. B. P_1 fällt mit dem unendlich fernen Punkt zusammen. Auch dann wird

$$\lambda_1 = \lambda_4 = +1, \ \lambda_2 = \lambda_6 = 0, \ \lambda_3 = \lambda_5 = \infty.$$

Fallen aber alle drei Punkte zusammen, so werden die Verhältnisse sämmtlich unbestimmt $\left(\text{von der Form } \frac{0}{0}\right)$

Definition eines Doppelverhältnisses zwischen vier Punkten. Unter Doppelverhältniss oder anharmonischem Verhältniss der Punkte P_3 (x_3) und P_4 (x_4) zu P_1 (x_1) und P_2 (x_2) versteht man den Bruch

$$\frac{\text{Verhältniss von } P_3 \text{ zu } P_1 \text{ und } P_2}{\text{Verhältniss von } P_4 \text{ zu } P_1 \text{ und } P_2} = \frac{(P_1\,P_2\,P_3)}{(P_1\,P_2\,P_4)}.$$

Führen wir für dieses Doppelverhältniss das Symbol $(P_1\, P_2\, P_3\, P_4)$ ein und bezeichnen es mit D, so folgt:

$$D = (P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{(P_1 P_2 P_3)}{(P_1 P_2 P_4)} = \frac{\dfrac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3}}{\dfrac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4}} = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}. \qquad 8)$$

Das Doppelverhältniss ist hiernach ein Verhältniss zweier einfacher Verhältnisse, und wird daher positiv oder negativ, je nachdem die letzteren gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Liegen also P_3 und P_4 beide ausserhalb oder beide innerhalb $P_1\, P_2$, so wird D positiv, liegt aber der eine innerhalb, der andere ausserhalb, so wird D negativ. Man drückt dies auch so aus: D wird negativ oder positiv, je nachdem P_3 und P_4 durch P_1 und P_2 getrennt sind oder nicht (sollten P_3 und P_4 beide ausserhalb P_1 und P_2 aber auf verschiedenen Seiten von $P_1\, P_2$ liegen, so heissen sie auch durch P_1 und P_2 nicht getrennt, indem man sich vorstellt, dass man von P_3 zu P_4 über den unendlich fernen Punkt gelangen kann, ohne durch P_1 oder P_2 hindurch zu gehen).

Man kann die vier Punkte auf 1. 2. 3. 4 = 4! = 24 Arten permutiren und somit nach 8) 24 Doppelverhältnisse zwischen ihnen aufstellen. Dieselben sind aber nicht alle von einander verschieden, weil manche Permutationen denselben Werth des Doppelverhältnisses ergeben. Ganz klar wird dieser Sachverhalt durch folgenden Satz:

Ein Doppelverhältniss ändert seinen Werth nicht, wenn man von den vier Punkten irgend zwei und zugleich die beiden übrig bleibenden vertauscht.

Betrachten wir z. B. das Doppelverhältniss

$$\alpha) \qquad (P_1\, P_2\, P_3\, P_4) = \frac{(x_1 - x_3)\,(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)\,(x_1 - x_4)}.$$

Man vertausche P_1 mit P_2 und P_3 mit P_4, so folgt:

$$\beta) \qquad (P_2\, P_1\, P_4\, P_3) = \frac{(x_2 - x_4)\,(x_1 - x_3)}{(x_1 - x_4)\,(x_2 - x_3)},$$

ferner vertausche man in α) P_1 mit P_3 und P_2 mit P_4:

$$\gamma) \qquad (P_3\, P_4\, P_1\, P_2) = \frac{(x_3 - x_1)\,(x_4 - x_2)}{(x_4 - x_1)\,(x_3 - x_2)},$$

und endlich vertausche man in α) P_1 mit P_4 und P_2 mit P_3:

$$\delta) \qquad (P_4\,P_3\,P_2\,P_1) = \frac{(x_4 - x_2)\,(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_2)\,(x_4 - x_1)}.$$

In der That sind die vier Doppelverhältnisse α), β), γ), δ) identisch einander gleich. Man könnte nun versuchen, aus den so gefundenen drei Doppelverhältnissen β), γ), δ) durch dieselben Vertauschungen wieder neue Doppelverhältnisse zu bilden, die nun auch ihnen gleich sein müssten; aber man kommt, wie jeder Versuch lehrt, dabei immer wieder auf eines der vier Doppelverhältnisse α), β), γ), δ) zurück. Die vier Permutationen bilden eben, was man eine „Gruppe" nennt, derart, dass jede Substitution, welche eine der Permutationen α), β), γ), δ) in eine andere überführt, zugleich jede dieser vier Permutationen in eine andere von ihnen verwandelt.

Da nun aber doch formell 24 Doppelverhältnisse aufgestellt werden können, so bleibt noch die Frage, wie man ohne Umschweife sechs wirklich verschiedene unter ihnen findet. Hierzu bemerke man, dass jeder Punkt an jede Stelle gebracht werden kann. Liegt z. B. $(P_2\,P_4\,P_1\,P_3)$ vor und soll P_4 zuletzt stehen, so vertausche man P_4 mit P_3 und P_1 mit P_2 und man erhält $(P_1\,P_3\,P_2\,P_4)$. Man bringe daher für alle Doppelverhältnisse P_4 an die letzte Stelle und permutire nur noch P_1, P_2, P_3 auf alle Arten. Setzt man analog zu 6)

$$(x_1 - x_2)\,(x_3 - x_4) = B_3, \quad (x_2 - x_3)\,(x_1 - x_4) = B_1, \quad (x_3 - x_1)\,(x_2 - x_4) = B_2 \qquad \mathbf{9)}$$

und bezeichnet die 6 Doppelverhältnisse mit D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, so folgt:

$$\begin{aligned}
(P_2\,P_3\,P_1\,P_4) &= D_1 = -\frac{B_3}{B_2}\\
(P_3\,P_1\,P_2\,P_4) &= D_2 = -\frac{B_1}{B_3}\\
(P_1\,P_2\,P_3\,P_4) &= D_3 = -\frac{B_2}{B_1}\\
(P_3\,P_2\,P_1\,P_4) &= D_4 = -\frac{B_2}{B_3}\\
(P_1\,P_3\,P_2\,P_4) &= D_5 = -\frac{B_3}{B_1}\\
(P_2\,P_1\,P_3\,P_4) &= D_6 = -\frac{B_1}{B_2}
\end{aligned} \qquad \mathbf{10)}$$

Man sieht, dass die Formeln 10) den Formeln 6) genau nachgebildet sind, nur dass jetzt für die Ausdrücke A_1, A_2, A_3 hier die etwas complicirteren B_1, B_2, B_3 stehen. Die Analogie geht aber noch weiter. Sie ist durchaus vollkommen. Denn wie man hinterher durch Einsetzen von 9) leicht bestätigt, gilt auch hier die analoge Gleichung zu 5a), nämlich:

$$B_1 + B_2 + B_3 = 0. \qquad \textbf{9a)}$$

Also können die Schlüsse, welche dort aus den Gleichungen 5a) und 6) gezogen wurden, Wort für Wort auf die Doppelverhältnisse übertragen werden. Im besonderen sind also auch hier sämmtliche Doppelverhältnisse durch eines, z. B. D_1 mitbestimmt und man findet analog zu 7)

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= D_1 \\ D_2 &= \frac{D_1 - 1}{D_1} \\ D_3 &= \frac{1}{1 - D_1} \\ D_4 &= \frac{1}{D_1} \\ D_5 &= \frac{D_1}{D_1 - 1} \\ D_6 &= 1 - D_1. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{11)}$$

Man spricht daher auch kurz von dem Doppelverhältniss zwischen 4 Punkten, indem eines von den sechs genommen wird.

Bemerkung: Auch in der Mathematik ist es rathsam, jede auffallende Analogie, wie die hier gefundene, auf ihren innersten Grund zu prüfen. Dieser findet sich nun leicht a posteriori darin, dass das Doppelverhältniss $D = (P_1 P_2 P_3 P_4)$ sofort in das einfache Verhältniss $(P_1 P_2 P_3)$ übergeht, wenn P_4 mit dem unendlich fernen Punkt zusammenfällt. In diesem Falle ist nämlich:

$$(P_1 P_2 P_3 P(\infty) = \frac{(P_1 P_2 P_3)}{(P_1 P_2 P\infty)} = \frac{(P_1 P_2 P_3)}{+1} = (P_1 P_2 P_3).$$

Anmerkung: Die Identität $B_1 + B_2 + B_3 = 0$ oder $(x_2 - x_3)(x_1 - x_4) + (x_3 - x_1)(x_2 - x_4) + (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) = 0$ stellt eine merkwürdige Beziehung zwischen den 6 Entfernungen von 4 Punkten dar. Nach Formel 1) lautet dieselbe

$$P_3 P_2 \times P_4 P_1 + P_1 P_3 \times P_4 P_2 + P_2 P_1 \times P_4 P_3 = 0$$

oder wenn man (Fig. 9) nur positive Strecken einführt; also $P_3 P_2 = - P_2 P_3$ setzt etc.

Fig. 9.

$$P_1 P_3 \times P_2 P_4 = P_1 P_2 \times P_3 P_4 + P_2 P_3 \times P_1 P_4$$
$$(6 \times 5 \quad = \quad 3 \times 4 \quad + \quad 2 \times 9).$$

Klingt dies nicht genau so, wie der bekannte Satz des Ptolemaeus vom Kreisviereck, dass nämlich das Rechteck aus den beiden Diagonalen gleich der Summe der Rechtecke aus den gegenüberliegenden Seiten ist? Auch hier ist
$$P_1 P_3 \times P_2 P_4 = P_1 P_2 \times P_3 P_4 + P_2 P_3 \times P_1 P_4$$
und unser Satz ist in der That ein Grenzfall des Ptolemaeischen, wenn man den Radius des Kreises unendlich gross werden lässt.

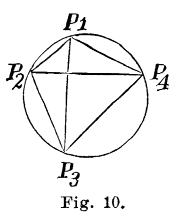


Fig. 10.

Fallen zwei der vier Punkte zusammen, so werden zwei von den $D = +1$, zwei $= 0$, zwei $= \infty$. Fallen aber drei Punkte zusammen, so werden alle 6 Doppelverhältnisse unbestimmt (da dann $B_1 = B_2 = B_3 = 0$).

Von besonderer Bedeutung aber ist der Fall, dass ein Doppelverhältniss, z. B. $(P_1\, P_2\, P_3\, P_4) = -1$ ist, dass also $(P_1\, P_2\, P_3) = -(P_1\, P_2\, P_4)$. Dann heissen die vier Punkte harmonisch (Fig. 11) und zwar sind P_1 und P_2 sowie P_3 und P_4 einander zugeordnet.

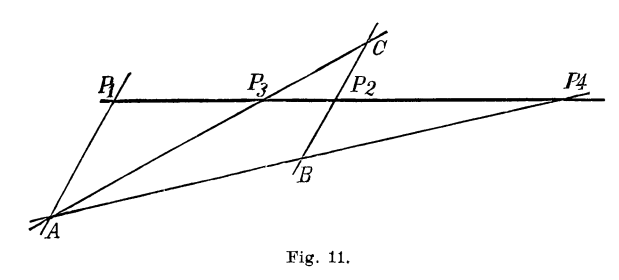


Fig. 11.

Die Bedingung der harmonischen Lage kann auch in der Proportion ausgedrückt werden. (Fig. 11.)

$$P_1\, P_3 : -P_2\, P_3 = P_1\, P_4 : P_2\, P_4,$$

d. h. die Strecke $P_1\, P_2$ wird durch den einen Punkt (P_3) von innen im selben Verhältniss getheilt, wie durch den anderen Punkt (P_4) von aussen.

Aufgabe: Zu drei Punkten P_1, P_2, P_3, den vierten harmonischen P_4 zu finden.

Lösung (Fig. 11). Die Aufgabe ist dreideutig; es muss erst hinzugefügt werden, welche zwei der drei Punkte einander zugehören. Sie seien P_1 und P_2. Dann ziehe man durch P_1 und P_2 irgend zwei zu einander parallele Linien und durch P_3 eine dritte Linie, die sie in A und C schneidet, verlängere weiter $C P_2$ über P_2 um sich selbst bis B, so trifft $A B$ die gegebene Gerade im vierten harmonischen Punkt P_4 —. Analytisch wird die Aufgabe gelöst, indem man P_1, P_2, P_3 auf einen beliebigen Punkt als Anfangspunkt bezieht und nun die unbekannte Abscisse x_4 des vierten Punktes aus der Gleichung

$$\frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)} = -1$$

bestimmt.

Satz: Wenn $(P_1 P_2 P_3 P_4) = (P_1 P_2 P_4 P_3)$ und nicht etwa zwei Punkte zusammenfallen, so liegen die vier Punkte harmonisch.

Beweis: Nach den Gleichungen 11) ist stets

$$(P_1 P_2 P_4 P_3) = \frac{1}{(P_1 P_2 P_3 P_4)},$$

also hier $$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{1}{(P_1 P_2 P_3 P_4)}$$

$$(P_1 I_2 P_3 P_4)^2 = 1$$

also entweder $(P_1 P_2 P_3 P_4) = +1$

oder $(P_1 P_2 P_3 P_4) = -1.$

Der erstere Fall ist ausgeschlossen, weil er nur eintritt, wenn P_3 mit P_4 oder P_1 mit P_2 zusammenfällt, also bleibt

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = -1,$$

d. h. die Punkte liegen harmonisch. q. e. d.

Aus der Bedingungsgleichung für die harmonische Lage, nämlich $(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) = -(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)$, lassen sich noch folgende wichtige Schlüsse ziehen:

1. Man lasse den Anfangspunkt mit P_1 zusammenfallen (Fig. 12.): dann ist $x_1 = 0$ und die Gleichung wird:

$$-x_3(x_2 - x_4) = -(x_2 - x_3) \cdot (-x_4)$$

P_1 P_3 P_2 P_4 — x_4, x_2, x_3

Fig. 12.

hieraus:

$$x_2 = \frac{2x_3\, x_4}{x_3 + x_4}, \text{ oder: } \frac{1}{x_2} = \frac{\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}}{2}.$$

Anmerkung: Dieser Werth von x_2 wird das harmonische Mittel von x_3 und x_4 genannt. (Wird nämlich $x_3 = x_4$, so folgt $x_2 = x_3 = x_4$). Somit sind zu unterscheiden:

1. das arithmetische Mittel $= \frac{x_3 + x_4}{2}$ (hat den grössten Werth),
2. das geometrische Mittel $= \sqrt{x_3\, x_4}$,
3. das harmonische Mittel $= \frac{2x_3\, x_4}{x_3 + x_4}$ (hat den kleinsten Werth).

Fig. 13.

2. Man lasse den Anfangspunkt mit der Mitte M von $P_1\, P_2$ zusammenfallen. (Fig. 13) Dann ist $x_1 = -x_2$ und die Bedingung der harmonischen Lage ergiebt

$$-(x_2 + x_3)(x_2 - x_4) = +(x_2 - x_3)(x_2 + x_4)$$

$$-x_2^2 - x_3\, x_2 + x_2\, x_4 + x_3\, x_4 = x_2^2 - x_2\, x_3 + x_2\, x_4 - x_3\, x_4$$

und endlich

$$x_2^2 = x_3\, x_4;\; x_2 = \sqrt{x_3 \cdot x_4}. \qquad \textbf{12)}$$

Also: Der Abstand der Mitte zweier zugehöriger Punkte von diesen Punkten ist das geometrische Mittel der Abstände derselben Mitte von den beiden anderen zugehörigen Punkten.

Da $x_3 \cdot x_4$ hier positiv, nämlich $= x_2^2$ ist, so folgt übrigens, dass P_3 und P_4 auf derselben Seite von M liegen.

Der Begriff des Doppelverhältnisses, welcher sich zu Anfang etwas gesucht und fremdartig ausnimmt, ist dennoch, wie der § 3 zeigen wird, für die Geometrie ein Fundamentalbegriff ersten Ranges geworden. Hier mögen die Betrachtungen über ihn durch Nachweisung einer eigenthümlichen Beschaffenheit seines analytischen Ausdruckes

$$\frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}$$

zum Abschluss gebracht werden.

Definition: Eine veränderliche Grösse y heisst eine gebrochene lineare Funktion oder kurz eine lineare Funktion

einer anderen veränderlichen Grösse x, wenn zwischen ihnen die Gleichung aufgestellt wird:

$$y = \frac{a + bx}{c + dx} \left(\text{z. B.: } y = \frac{4 - 3x}{2 + 7x}\right), \qquad \textbf{13)}$$

wo a, b, c, d vier gegebene Zahlen, die Coefficienten der Funktion (a erster, b zweiter, c dritter, d vierter Coefficient) vorstellen. Die Einführung von y an Stelle von x heisst dementsprechend eine lineare Substitution.

Offenbar kommt es nicht sowohl auf die Werthe der vier Coefficienten selbst, als vielmehr nur auf ihre Verhältnisse an. Denn wenn man sie z. B. alle verdoppeln will, so hat man in 13) nur Zähler und Nenner mit 2 zu multipliciren. Aus diesem Grunde kann auch einer der Coefficienten (wenn er nicht zufällig $= 0$ ist) $= 1$ genommen werden, z. B. $c = 1$, indem man Zähler und Nenner mit $\frac{1}{c}$ multiplicirt. Ist $d = 0$, so verwandelt sich 13), wenn noch $c = 1$ gesetzt wird, in $y = a + bx$ und y heisst dann eine ganze lineare Funktion von x.

Damit y wirklich eine Funktion von x werde, darf zwischen den Coefficienten nicht die Proportion $a : b = c : d$, oder die Gleichung $bc - ad = 0$ stattfinden, da 13) auch so geschrieben werden kann

$$y = \frac{a + bx}{c + dx} = \frac{a + \frac{b}{d}(c + dx) - \frac{b}{d}c}{c + dx} = \frac{b}{d} + \frac{ad - bc}{d} \cdot \frac{1}{c + dx}.$$

Ist also $bc - ad = 0$, so reducirt sich y auf die Constante $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$, ausgenommen für $x = -\frac{c}{d} = -\frac{a}{b}$, für welchen besonderen Werth von x umgekehrt die Funktion y die Form $\frac{0}{0}$ erhält, also unbestimmt wird. Die Grösse $\triangle = bc - ad$ spielt somit eine sehr wichtige Rolle, sie wird Determinante der Substitution genannt.

Die linearen Funktionen haben unter anderen folgende Eigenschaften:

Erste Eigenschaft: Ist y eine lineare Funktion von x, so ist auch umgekehrt x eine lineare Funktion von y.

Denn aus:

$$y = \frac{a + bx}{c + dx}$$

folgt sofort durch Umkehrung:

$$x = \frac{a - cy}{-b + dy}.$$

Anmerkung: Wie man sieht, sind hier der erste und der letzte Coefficient a und d bei der Umkehrung dieselben geblieben. An Stelle von b ist aber $-c$, an Stelle von c ist $-b$ getreten. Ist also $b = -c$, also auch $c = -b$, oder $b + c = 0$, so stimmen die vier Coefficienten der umgekehrten Funktion vollständig mit denen der ursprünglichen Funktion überein. Man nennt dann die Funktion involutorisch (vergleiche § 3)

$\left(\text{z.B. } y = \frac{4 - 3x}{3 + 5x} \text{ giebt } x = \frac{4 - 3y}{3 + 5y}; y = -x + 3 \text{ giebt } x = -y + 3\right).$

Zweite Eigenschaft: Ist y eine lineare Funktion von x, z aber eine solche von y, so ist auch z eine lineare Funktion von x. Ist nämlich:

$$y = \frac{a + bx}{c + dx}, \quad z = \frac{\alpha + \beta y}{\gamma + \delta y},$$

so folgt durch Einsetzen:

$$z = \frac{\alpha + \beta \frac{a + bx}{c + dx}}{\gamma + \delta \frac{a + bx}{c + dx}} = \frac{\alpha (c + dx) + \beta (a + bx)}{\gamma (c + dx) + \delta (a + bx)},$$

also endlich

$$z = \frac{(\alpha c + \beta a) + (\alpha d + \beta b) x}{(\gamma c + \delta a) + (\gamma d + \delta b) x}.$$

Die neue Determinante ist das Produkt der beiden alten, denn man findet:

$$(\alpha d + \beta b)(\gamma c + \delta a) - (\alpha c + \beta a)(\gamma d + \delta b) \equiv (bc - ad)(\beta\gamma - \alpha\delta).$$

Diese zweite Eigenschaft drückt man auch so aus, dass die lineare Funktion einer linearen Funktion von x wieder eine lineare Funktion von x ist. Alle linearen Funktionen bilden eine in sich geschlossene Gruppe, derart, dass durch Verknüpfung zweier solcher Funktionen wieder eine Funktion dieser Gruppe entsteht. Uebrigens bemerke man sehr wohl,

dass auch die identische Substitution x für x zu dieser Gruppe gehört, da man in $\frac{a + bx}{c + dx}$, nur $a = d = 0$ und $b = c$ zu setzen braucht, um sie zu erhalten.

Insbesondere bilden alle ganzen linearen Funktionen eine Untergruppe dieser Gruppe, denn aus

$$y = a + bx, \; z = \alpha + \beta y$$

folgt

$$z = \alpha + \beta (a + bx) = (\alpha + \beta a) + \beta bx.$$

Dritte Eigenschaft: Der analytische Ausdruck für ein Doppelverhältniss

$$\frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}$$

hat die höchst bemerkenswerthe Eigenschaft, bei keiner linearen Substitution seine Form zu ändern.

Damit soll folgendes gesagt sein: Substuirt man für x irgend eine lineare Funktion

$$y = \frac{a + bx}{c + dx},$$

setzt dann für x der Reihe nach x_1, x_2, x_3, x_4 und bezeichnet die so erhaltenen Werthe von y mit y_1, y_2, y_3, y_4, so wird:

$$\frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_2 - y_3)(y_1 - y_4)} \equiv \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}. \qquad \textbf{14)}$$

Beweis: Es ist:

$$y_1 = \frac{a + bx_1}{c + dx_1}, \quad y_3 = \frac{a + bx_3}{c + dx_3}, \text{ also:}$$

$$y_1 - y_3 = \frac{(c + dx_3)(a + bx_1) - (a + bx_3)(c + dx_1)}{(c + dx_1)(c + dx_3)}$$

$$= \frac{bcx_1 + adx_3 - bcx_3 - adx_1}{(c + dx_1)(c + dx_3)} = \frac{(x_1 - x_3)(bc - ad)}{(c + dx_1)(c + dx_3)}$$

Ganz ebenso werden $y_2 - y_4$, $y_2 - y_3$, $y_1 - y_4$ gebildet. Setzt man diese Ausdrücke in die Form $\frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_2 - y_3)(y_1 - y_4)}$ ein, so sieht man sofort, dass sich die im Zähler auftretenden vier Divisoren $c + dx_1$, $c + dx_2$, $c + dx_3$, $c + dx_4$ gegen dieselben Divisoren im Nenner fortheben. Ebenso hebt sich die Determinante $bc - ad$ zweimal und es bleibt in der That nur übrig:

$$\frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}. \quad \text{q. e. d.}$$

Dieser Satz läſst sich aber auch umkehren:

Hat eine Funktion $y = f(x)$ die Eigenschaft, dass irgend vier Werthen x_1, x_2, x_3, x_4 vier solche Werthe y_1, y_2, y_3, y_4 derart entsprechen, dass $\frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_2 - y_3)(y_1 - y_4)} = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}$, so ist sie eine lineare Funktion.

Beweis: Man nehme x_1, x_2, x_3 also auch y_1, y_2, y_3 als fest, dagegen x_4 und y_4 als veränderlich an, bezeichne letztere daher einfach mit x und y; dann sagt die Gleichung 14) aus, dass eine gebrochene lineare Funktion von y = einer gebrochenen linearen Funktion von x sein soll. Nach Eigenschaft 1) und 2) ist demnach auch y selbst eine lineare Funktion von x. q. e. d.

Der analytische Ausdruck für ein Doppelverhältniss hat also die Eigenschaft, bei Anwendung einer linearen Substitution immer seine Form zu behalten. Er ist für solche Substitutionen unwandelbar, eine Invariante. Die tiefe geometrische Bedeutung dieses Satzes wird in § 3 zu Tage treten.

Die lineare Funktion

$$y = \frac{a + bx}{c + dx}$$

hat noch die besondere Eigenthümlichkeit, dass y mit x entweder immer wächst, oder immer abnimmt. Denn schreibt man y wie früher in der Form:

$$y = \frac{b}{d} + \frac{\Delta}{- cd - d^2 x}$$

so sieht man, wie in dem zweiten Bruch der Nenner mit wachsendem x[1]) abnimmt. y muss daher zu oder abnehmen, je nachdem Δ positiv oder negativ ist. Nur wenn $x = -\frac{c}{d}$ genommen wird, so wird $y = \pm \infty$ und zwar so, dass y entweder von $-\infty$ zu $+\infty$ oder von $+\infty$ zu $-\infty$ springt, (wovon schon bei Betrachtung des einfachen Verhältnisses λ zwischen drei Punkten ein Beispiel gefunden wurde). Darnach unterscheidet man die linearen Funktionen nach dem Vorzeichen von Δ in wachsende und abnehmende.

---

[1]) Eine negative Grösse nimmt ab, wenn ihr absoluter Werth wächst. Es ist $-1000 < -100$.

Aufgaben.

1. In Bezug auf fünf in einer Geraden liegende Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 sind folgende Lagenangaben gemacht. $P_3 P_4 = +6$, $P_2 P_5 = -11$, $P_4 P_1 = +3$, $P_5 P_3 = -8$. Gesucht die Abscissen der fünf Punkte, wenn der Reihe nach erst P_1, dann P_2 u. s. w. zum Anfangspunkt genommen werden.

2. Bei feinen Wägungen wartet man nicht, bis der Zeiger zur Ruhe gekommen ist, sondern liest an der Skala die Skalenstriche einiger aufeinanderfolgender Ausschläge ab. Es mögen vier Ablesungen $+15,8$, $-3,2$, $+14,7$, $-1,7$ gemacht worden sein, welches ist die Gleichgewichtslage, wenn sie durch die Formel:

$$x = \frac{x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4}{8}$$

bestimmt wird? (x Abscisse der Gleichgewichtslage, x_1, x_2, x_3, x_4 Abscissen der Ablesungen).

3. Gegeben $P_1(+2)$, $P_2(+5)$, $P_3(-8)$, $P_4(+9)$. Zu berechnen die sechs Doppelverhältnisse.

4. Gegeben $P_1(+2)$, $P_2(+5)$, $P_3(-8)$. Es sollen die Abscissen x_1', x_2', x_3' der vierten harmonischen Punkte P_1', P_2', P_3' gefunden werden, wenn P_1' dem P_1, P_2' dem P_2, P_3' dem P_3 zugeordnet wird. Darauf sind in gleicher Weise zu P_1', P_2', P_3' die drei vierten harmonischen Punkte zu berechnen. Der durch diese Rechnung gefundene eigenthümliche Satz ist allgemein zu beweisen.

---

§ 2.

Das Strahlenbüschel. Richtungsconstante. Doppelverhältniss zwischen vier Strahlen.

Das Prinzip der Dualität oder Reciprocität zwischen Punkt und gerader Linie ist so wichtig und gestattet so vielfache Anwendungen, dass es angezeigt ist, schon hier auf dasselbe Bedacht zu nehmen. Es sagt aus, dass man in einem grossen Bereich von Sätzen, der später scharf begrenzt werden wird, Punkt mit gerader Linie und gerade Linie mit Punkt vertauschen kann, z. B:

Satz: Zwei Punkte bestimmen eine gerade Linie, nämlich ihre Verbindungslinie.

Reciproker Satz: Zwei Gerade bestimmen einen Punkt, nämlich ihren Schnittpunkt. (Sind die Geraden parallel, so liegt der Schnittpunkt unendlich fern.)[1]

Weiter: Auf einer Geraden giebt es unzählig viele Punkte, die man in ihrer Gesammtheit eine geradlinige Punktreihe nennt. Die gerade Linie heisst der Träger der Punktreihe.

Und reciprok: Durch einen Punkt gehen unzählig viele gerade Linien, die man in ihrer Gesammtheit ein Strahlenbüschel nennt. Der Punkt heisst das Centrum des Strahlenbüschels.

So stehen sich Punktreihe und Strahlenbüschel gegenüber und die Rücksicht auf die Reciprocität erfordert eine analytische Behandlung des Strahlenbüschels, nachdem im ersten § diejenige der Punktreihe vorangegangen.

Jede durch das Centrum gehende Gerade wird in ihrer ganzen Ausdehnung ein Strahl des Strahlenbüschels genannt. Er zerfällt in zwei vom Centrum ausgehende, einseitig begrenzte Halbstrahlen von entgegengesetzter Richtung; für den Strahl selbst gilt aber die eine Richtung ebenso wie die andere, für ihn sind beide Richtungen so gut wie eine, sie bilden kurz die Richtung des Strahles.

Wie bei den Punkten einer Punktreihe die absolute Lagenbestimmung ausgeschlossen ist, so erscheint auch hier die absolute Richtungsbestimmung unmöglich. Es kann sich also nur um die Abweichung zweier Richtungen von einander, um den Winkel handeln, welchen sie bilden. Man pflegt dabei in der Regel den concaven Winkel $\alpha = \sphericalangle\, l_1\, l_2$ zu nehmen (Fig. 14a und 14b). Doch

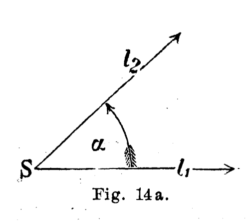


Fig. 14a.

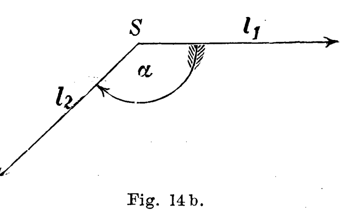


Fig. 14b.

[1]) Es handelt sich hier um Gebilde, welche in einer Ebene liegen. Im Raum gilt die Reciprocität auch, nur dass dort Ebene und Punkt einander entsprechen.

die blosse Angabe der Grösse dieses Winkels genügt nicht, um die relative Lage der Richtung l_2 gegen die Richtung l_1 zu bestimmen; man muss noch hinzufügen, in welchem Sinne l_1 um den concaven Winkel α zu drehen ist, um zu l_2 zu gelangen, ob im Sinne der Drehung des Uhrzeigers (14b) oder entgegengesetzt (14a) oder kurz, ob rechts herum oder links herum.[1])

Diese Drehungssinne werden nun der eine als positiv, der andere als negativ genommen. Theoretisch ist die Entscheidung ganz willkürlich; ist sie aber getroffen, so muss man sich auch streng an sie halten. In den meisten Lehrbüchern der analytischen Geometrie findet man den Drehungssinn entgegengesetzt zum Uhrzeiger als positiv angenommen und darum soll es auch hier geschehen. Somit erhält ein Winkel das Zeichen + oder —, je nachdem er durch eine Drehung im entgegengesetzten oder im Sinne des Uhrzeigers entstanden ist. Hiernach ist stets

$$\sphericalangle\, l_2 l_1 = - \sphericalangle\, l_1 l_2.$$

Ferner wird zur einheitlichen Richtungsbestimmung eine Richtung als Anfangsrichtung ausgewählt — entsprechend dem Anfangspunkt der Abscissen. So entsteht der Richtungswinkel, d. h. der Winkel, um den die Anfangsrichtung gedreht werden muss, um zu einer gegebenen Richtung zu gelangen.

Bei der Messung der Winkel zeigt sich sofort eine Grenze der Reciprocität zwischen Punkt und gerader Linie. Denn offenbar giebt es a priori keine Längeneinheit, wohl aber eine Winkeleinheit, nämlich den vollen Winkel oder die Hälfte, den gestreckten Winkel, oder den vierten Theil, den rechten Winkel $= 1\,R$. Seit Alters her wird der volle Winkel in 360^0, der Grad in $60'$, die Minute in $60''$ getheilt, und

---

[1]) Dieser Angabe des Drehungssinnes liegt eine stillschweigende Vereinbarung darüber zu Grunde, von welcher Seite der Ebene die Drehung betrachtet werden soll. Wenn der Leser das Blatt umwendet und gegen das Licht hält, dass die Figuren 14a und 14b durchscheinen, so wird er sofort die Umkehrung der beiden Drehungssinne bemerken. [Dass die Zeiger unserer Uhren rechts herum gehen, hat sicherlich darin seinen Grund, dass die Sonne auf der nördlichen Erdhälfte, wo die menschliche Kultur entstanden ist, rechts herum über den Himmel läuft.]

diese Eintheilung haben wir noch, trotzdem sie in Ansehung unseres strengen Decimalsystems ziemlich unbequem ist.[1]) Bekanntlich wird aber vielfach, besonders in der Differential- und Integralrechnung die Angabe des Winkels im Bogenmass bevorzugt, wobei $360^0 = 2\pi$, $1^0 = \frac{\pi}{180}$, $1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60}$ etc. Dann wird derjenige Winkel zur Einheit, dessen Bogen = dem Radius ist; man findet ihn im Gradmass zu $57^0\ 17{,}747'$. In der analytischen Geometrie sind beide, Bogenmass und Gradmass gebräuchlich, man bezeichnet den rechten Winkel mit 90^0 oder $\frac{\pi}{2}$, 30^0 mit $\frac{\pi}{6}$ u. s. w.

Bei der Beschränkung auf concave Winkel muss die Anfangsrichtung positiv und negativ um je 180^0 gedreht werden, bis beiderseits die entgegengesetzte Richtung erreicht ist. Dies entspricht der in der Geographie üblichen Zählung der Länge östlich und westlich um je 180^0. Vortheilhafter aber ist es, von der Anfangsrichtung nur im positiven Sinne ganz herum, von 0^0 bis 360^0 zu drehen, wie die Astronomen bei Zählung der Rektascensionen. Noch besser aber legt man sich überhaupt keine Beschränkung auf und lässt ein und derselben Richtung unzählig viele Richtungswinkel zukommen. Ist hiernach φ einer von diesen Richtungswinkeln (bezogen auf eine gegebene Anfangsrichtung), so sind offenbar $\varphi + 2\pi$, $\varphi + 4\pi$, allgemein $\varphi + 2k\pi$ (wo k eine ganze Zahl) auch Richtungswinkel derselben Richtung. Aber auch $-(2\pi - \varphi) = \varphi - 2\pi$, ebenso $\varphi - 4\pi$, allgemein $\varphi - 2k\pi$ sind Richtungswinkel derselben Richtung. Demnach sind sämmtliche Richtungswinkel einer Richtung durch den Ausdruck $\varphi \pm 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, 3$) gegeben.

Bei dem Übergange von einer Richtung zur entgegengesetzten hat man offenbar noch π, oder allgemein ein ungerades Vielfaches von π hinzuzufügen — oder abzuziehen. Für einen Strahl also, d. i. für eine gerade, durch S gehende Linie werden sämmtliche Richtungswinkel, ohne Unterschied,

---

[1]) Zur Zeit der französischen Revolution wurde in Frankreich beschlossen, den rechten Winkel in 100^0, den Grad in $100'$ etc. zu theilen. Solche Grade, Minuten und Sekunden hat z. B. Laplace in seiner Mécanique céleste. Diese Neuerung ist aber leider nicht von Dauer gewesen.

welcher von beiden Richtungen des Strahles sie angehören, durch die Formel $\varphi \pm k\pi$ $(k = 0, 1, 2, 3 \ldots)$ gegeben.

Hält man sich nicht an die Richtungswinkel selbst, sondern an ihre trigonometrischen Funktionen, so spielt für dieselbe Richtung die Vieldeutigkeit des Winkels keine Rolle, da

$$\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\\ \mathrm{tg}\\ \mathrm{cotg}\end{matrix}\right\}(\varphi \pm 2k\pi) = \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\\ \mathrm{tg}\\ \mathrm{cotg}\end{matrix}\right\}\varphi.$$

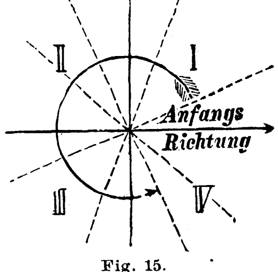


Fig. 15.

Anmerkung: Die Angabe nur einer dieser Funktionen allein führt stets eine Zweideutigkeit mit sich, die durch weitere Bezeichnung des Quadranten oder des Vorzeichens einer anderen trigonometrischen Funktion zu vermeiden ist. Wenn man z. B. weiss, dass $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$, so kann $\varphi = 180^0 + 30^0 = 210^0$, aber auch $= 360^0 - 30^0 = 330^0$ sein. Die Entscheidung wird z. B. durch das Vorzeichen von $\cos \varphi$ gegeben. Ist $\cos \varphi$ positiv $(= +\frac{1}{2}\sqrt{3})$, so wird $\varphi = 330^0$, ist $\cos \varphi$ negativ $(= -\frac{1}{2}\sqrt{3})$, so wird $\varphi = 210^0$.

In der analytischen Geometrie giebt man der Tangente, also $\mathrm{tg}\ \varphi$ den Vorzug vor den andern trigonometrischen Funktionen und zwar aus folgenden Gründen: Es entsprechen zwar auch einem gegebenen Werth von $\mathrm{tg}\ \varphi$, z. B. $\mathrm{tg}\ \varphi = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ zwei verschiedene Richtungen, (hier $\varphi = 30^0$ und $\varphi = 180^0 + 30^0 = 210^0$), aber doch zwei entgegengesetzte Richtungen, da $\mathrm{tg}\ (\varphi + \pi) = + \mathrm{tg}\ \varphi$. Daher wird durch $\mathrm{tg}\ \varphi$ derjenige Strahl eindeutig bestimmt, in welchem diese beiden Richtungen liegen, ohne Unterschied derselben. $\mathrm{tg}\ \varphi$ bezieht sich also kurzweg auf die Richtung einer geraden Linie und da ausserdem $\mathrm{tg}\ \varphi = 0$ für $\varphi = 0$, d. i. für die Anfangsrichtung, so hat man die Tangente lieber als die Cotangente genommen.

Die Tangente des Richtungswinkels wird auch der *Richtungscoefficient* oder die *Richtungsconstante* genannt. Sie wird von nun an mit m bezeichnet werden, also $m = \operatorname{tg} \varphi$. Nach der eben gemachten Bemerkung bleibt m unverändert, wenn die Richtung mit ihrer entgegengesetzten vertauscht wird; m bestimmt eben die Richtung einer Geraden, ohne dass ihre Theilung in zwei entgegengesetzt gerichtete Halbstrahlen in Rücksicht gezogen wird.

m ist $= 0$ für die Gerade, auf welcher die Anfangsrichtung liegt, $m = \pm \infty$ für die dazu senkrechte Gerade, m ist positiv, wenn die Gerade durch den ersten und dritten, negativ, wenn sie durch den zweiten und vierten Quadranten hindurchgeht. Der absolute Betrag von m entspricht dem Anstieg von Wegen und Eisenbahnen. Wenn man sagt, der Anstieg sei 1 : 10, so wird der Neigungswinkel gegen die horizontale Richtung durch die Gleichung $m = \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{10}$ bestimmt, woraus $\varphi = 5^0\ 43'$ gefunden wird. In diesem Sinne kann man m auch den Anstieg gegen die Anfangsrichtung nennen. Da durch die Gerade der Richtungscoefficient eindeutig bestimmt wird und umgekehrt zu jedem m nur eine Gerade gehört, so haben wir hier eine eindeutige analytische Darstellung der Geraden eines Strahlenbüschels.

Was für einen Punkt einer Punktreihe sein x, seine Abscisse, das ist für eine Gerade eines Strahlenbüschels sein m, seine Richtungsconstante.

Der einzige Unterschied ist der, dass die Abscisse x eines Punktes offen zu Tage liegt, während m erst aus dem Richtungswinkel φ durch die Gleichung

$$m = \operatorname{tg} \varphi \qquad 1)$$

gefunden werden muss.

Aufgabe: Gegeben zwei Richtungen mit den Richtungswinkeln φ_1 und φ_2, gesucht der Winkel δ zwischen diesen beiden Richtungen.

In Fig. 16 liest man sofort ab

$$\delta = \sphericalangle\, l_1\, l_2 = \varphi_2 - \varphi_1. \qquad 2)$$

Anfangsrichtung

Fig. 16.

Dieselbe Formel gilt aber, wie auch die Richtungen genommen werden (vergleiche die Bemerkung in § 1 über die

Eindeutigkeit der Formeln). Wenn man will, kann die Vieldeutigkeit von φ_1, φ_2 und δ durch die erweiterte Formel

$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 \pm 2k\pi$$

zum Ausdruck gebracht werden.

Man nennt δ auch den relativen Richtungswinkel der zweiten Richtung gegen die erste und die Tangente von δ den relativen Richtungscoefficienten. Derselbe ergiebt sich, wenn $\operatorname{tg} \varphi_1 = m_1$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = m_2$ gesetzt wird, nach 2) durch die Formel:

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \qquad \textbf{3)}$$

Stehen im besonderen die beiden Richtungen aufeinander senkrecht, so muss $\operatorname{tg} \delta = \infty$, also $1 + m_2 \cdot m_1 = 0$ werden. Und umgekehrt, wenn $1 + m_1 m_2 = 0$, so wird $\operatorname{tg} \delta = \infty$. Also:

Die Bedingung für das Senkrechtstehen zweier Geraden mit den Richtungscoefficienten m_1 und m_2 wird durch die Gleichung dargestellt

$$m_1 \cdot m_2 = -1, \; m_2 = -\frac{1}{m_1}. \qquad \textbf{3a)}$$

Man sagt, der eine Richtungscoefficient sei der negative reciproke Werth des andern. Ist z. B. $m_1 = -\frac{2}{3}$, so wird $m_2 = +\frac{3}{2}$.

Die Formel 3) dient auch zum Uebergang von einer Anfangsrichtung zu irgend einer anderen. Es sei die Richtung von l_1 diese neue Anfangsrichtung, weshalb statt m_1 einfach a gesetzt werde, um anzudeuten, dass m_1 nunmehr festgelegt ist. Ferner werde m statt m_2 gesetzt, um l_2 als eine beliebige Richtung zu kennzeichnen. Dann wird $\operatorname{tg} \delta$ der neue Richtungscoefficient. Er werde μ genannt. Die Formel 3) giebt

$$\mu = \frac{m - a}{1 + m \cdot a} \text{ und } m = \frac{\mu + a}{1 - \mu \cdot a}, \qquad \textbf{4)}$$

welche Transformationsformel das Analogon zu 2) § 1 ist.

Ist z. B. $a = 0$, so folgt $\mu = m$, wie es sein muss, da dann die neue Anfangsrichtung mit der alten zusammenfällt (oder ihr entgegengesetzt gerichtet ist). Steht die neue Anfangsrichtung auf der alten senkrecht, so wird $a = \infty$ und

$$\mu = \frac{m - a}{1 + ma} = \frac{\frac{m}{a} - 1}{\frac{1}{a} + m} = - \frac{1}{m}.$$

Ist $a = +1$, d. h. bildet die neue Anfangsrichtung mit der alten einen Winkel von 45° oder 225°, so wird

$$\mu = \frac{m - 1}{m + 1} \text{ u. s. w.}$$

Wird schliesslich mit der Anfangsrichtung auch noch das Vorzeichen des Drehungssinnes gewechselt, so muss in 4) $-\mu$ statt μ gesetzt werden, also:

$$-\mu = \frac{m - a}{1 + ma}, \quad -m = \frac{\mu - a}{1 + \mu \cdot a}.$$

Von wesentlicher Bedeutung aber ist der Umstand, dass stets der neue Richtungscoefficient μ eine lineare Funktion des alten m ist. Durch Anwendung des Satzes in § 1 über die Invarianteneigenschaft des analytischen Ausdruckes für ein Doppelverhältniss folgt daher auf der Stelle:

Sind m_1, m_2, m_3, m_4 die vier Richtungsconstanten von 4 Strahlen des Strahlenbüschels, so ist der Ausdruck:

$$D = \frac{(m_1 - m_3)(m_2 - m_4)}{(m_2 - m_3)(m_1 - m_4)} \qquad 5)$$

und ebenso jeder der 5 ihm entsprechenden von der Wahl der Anfangsrichtung durchaus unabhängig und nur von der gegenseitigen Lage der vier Strahlen bedingt. Man nennt ihn das Doppelverhältniss dieser vier Strahlen, das nunmehr völlig dem Doppelverhältniss von 4 Punkten entspricht und deshalb auch bezeichnet werden soll mit

$$D = (l_1, l_2, l_3, l_4)$$

Es bedarf wohl nur des Hinweises, dass zwischen den 6 Doppelverhältnissen von 4 Strahlen genau dieselben Beziehungen stattfinden, wie sie in § 1 für vier Punkte entwickelt wurden. Doch fehlt bei der eben gegebenen rein analytischen Definition dieses Doppelverhältnisses noch seine geometrische Deutung; sie folgt daher jetzt nach.

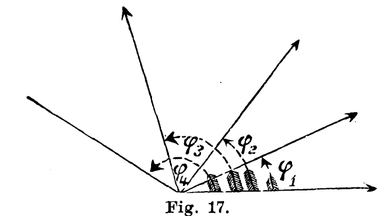


Fig. 17.

Man nehme (Fig. 17) auf jedem der vier Strahlen eine

der beiden entgegengesetzten Richtungen, bezeichne die vier Richtungswinkel mit φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, dann ist zunächst

$$m_1 = \operatorname{tg}\varphi_1,\ m_2 = \operatorname{tg}\varphi_2,\ m_3 = \operatorname{tg}\varphi_3,\ m_4 = \operatorname{tg}\varphi_4,$$

somit:

$$m_1 - m_3 = \operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1} - \frac{\sin\varphi_3}{\cos\varphi_3} = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_3}.$$

Berechnet man analog $m_2 - m_4$, $m_2 - m_3$ und $m_1 - m_4$, setzt in 5) ein und hebt $\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos\varphi_3 \cdot \cos\varphi_4$ im Zähler und Nenner, so folgt:

$$D = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_3) \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_4)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_4)} = \frac{\sin \sphericalangle l_3 l_1 \cdot \sin \sphericalangle l_4 l_2}{\sin \sphericalangle l_3 l_2 \cdot \sin \sphericalangle l_4 l_1}.$$

Daher: Das Doppelverhältniss zwischen vier Strahlen wird durch die sinus der von ihnen gebildeten Winkel genau so gebildet, wie das Doppelverhältniss von 4 Punkten durch die von ihnen gebildeten Entfernungen (weshalb das Doppelverhältniss von 4 Strahlen auch sinus-Verhältniss heisst).

Hiernach wäre der Ausdruck

$$\lambda = \frac{\sin \sphericalangle l_3 l_1}{\sin \sphericalangle l_3 l_2}$$

als das einfache Verhältniss von l_3 zu l_1 und l_2 zu bezeichnen. Doch ist zu bemerken, dass dieser Begriff nicht ganz dem des einfachen Verhältnisses zwischen drei Punkten entspricht. Für die einfachen Verhältnisse ist eben die Analogie unvollständig, weil für ein Strahlenbüschel der „unendlich ferne Strahl“ fehlt, welcher dem „unendlich fernen Punkte“ entsprechen sollte. So finden z. B. zwischen den 6 einfachen Verhältnissen, die man aus drei Strahlen durch Permutation bilden kann, durchaus nicht die Relationen statt, die in § 1 so gründlich behandelt worden sind. Ueberhaupt giebt es für drei Strahlen eines Strahlenbüschels nichts, was das einfache Verhältniss zwischen drei Punkten einer Punktreihe ersetzen könnte — wieder eine Grenze der Reciprocität zwischen Punkt und gerader Linie, die erst überschritten wird, wenn man Doppelverhältnisse nimmt.

Der Bruch

$$\lambda = \frac{\sin \sphericalangle l_3 l_1}{\sin \sphericalangle l_3 l_2}$$

kann übrigens leicht durch ein Verhältniss von Längen ausgedrückt werden. Nimmt man hierzu auf l_3 irgend einen

Punkt P im Abstande r von S an (Fig. 18) und fällt die beiden Lote Δ_1 in Δ_2 auf l_1 und l_2, so ist, wenn Δ_1 und Δ_2 absolut, oder positiv genommen werden und l_3 in dem concaven Winkel von l_1 l_2 oder in dessen Scheitelwinkel liegt:

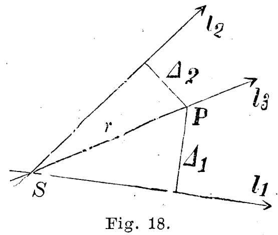


Fig. 18.

$$\Delta_1 = \pm r \sin \sphericalangle (l_1 l_3) = \mp r \cdot \sin \sphericalangle (l_3 l_1)$$

$$\Delta_2 = \pm r \cdot \sin \sphericalangle (l_3 l_2)$$

also

$$\lambda = -\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$$

Liegt dagegen l_3 in den beiden Nebenwinkelräumen, so wird:

$$\lambda = +\frac{\Delta_1}{\Delta_2}.$$

Daraus ergiebt sich folgende, von trigonometrischen Funktionen unabhängige Deutung des Doppelverhältnisses von vier Strahlen. Man nehme auf l_3 und l_4 (Fig. 19) irgend zwei Punkte P und Q an, fälle von ihnen die Lote Δ_1 und Δ_2 sowie Δ'_1 und Δ'_2 auf l_1 und l_2, dann ist das Doppelverhältniss:

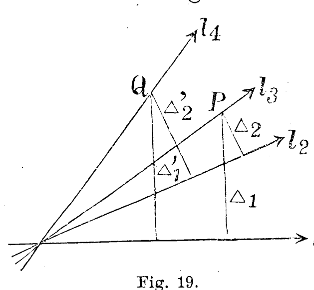


Fig. 19.

$$D = (l_1, l_2, l_3, l_4) = \pm \frac{\frac{\Delta_1}{\Delta_2}}{\frac{\Delta'_1}{\Delta'_2}} = \pm \frac{\Delta_1 \cdot \Delta'_2}{\Delta_2 \cdot \Delta'_1}$$

und zwar ist es negativ oder positiv, je nachdem l_3 und l_4 durch l_1 und l_2 getrennt sind oder nicht. (l_3 und l_4 heissen durch l_1 und l_2 getrennt, wenn man durch keine Drehung l_3 in die Lage von l_4 bringen kann, ohne wenigstens einer der Linien l_1 und l_2 zu begegnen). In Figur 19) ist also D positiv.

Definition. Vier Strahlen heissen harmonisch, wenn ihr Doppelverhältniss (oder vielmehr eines derselben) $= -1$ ist. Ist $(l_1, l_2, l_3, l_4) = -1$, so sind l_1 und l_2 sowie l_3 und l_4 einander zugeordnet. (Siehe § 1, Definition harmonischer Punkte).

Wählt man die Anfangsrichtung auf einem der vier Strahlen, z. B. auf l_1, so wird (wie in § 1):

$$\frac{1}{m_2} = \frac{\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}}{2}.$$

(Steht im besondern l_2 auf l_1 senkrecht, so wird $\frac{1}{m_2} = 0$, also $m_3 = - m_4$, d. h. stehen die Geraden eines Paares senkrecht aufeinander, so halbiren sie die Winkel des andern Paares. Oder auch: Zwei gerade Linien und ihre beiden Winkelhalbirenden bilden vier harmonische Strahlen).

Wird ferner die Anfangsrichtung in die eine Winkelhalbirende gesetzt, so folgt (wie in § 1)

$$m_1^2 = m_2^2 = m_3 \cdot m_4.$$

Jeder Punkt einer Ebene kann zum Centrum eines Strahlenbüschels genommen werden. Der Einfachheit wegen wählt man bei allen diesen Strahlenbüscheln ein und dieselbe Richtung zur Anfangsrichtung, so dass alle parallelen Linien ein und denselben Richtugscoefficienten, ein und dasselbe m erhalten.

Aufgaben:

1. In einem regulären Fünfeck ist eine Ecke mit den vier andern verbunden. Es sind die Werthe der sechs Doppelverhältnisse dieser vier Geraden zu finden.

2. Ein Winkel von 75° ist durch eine Gerade in zwei Theile von 45° und 30° getheilt worden. Welchen Winkel bildet der zu dieser Geraden zugehörende vierte harmonische Strahl mit ihr (und welche Winkel mit den beiden Schenkeln)?

3. Wie gross muss ein Winkel $\varphi = \sphericalangle\, l_1\, l_2$ sein, wenn das Doppelverhältniss $(l_1, l_4, l_2, l_3) = -\frac{1}{2}$ sein und l_3, l_4 den Winkel φ in drei gleiche Theile theilen soll, so dass $\sphericalangle\, l_1\, l_3 = \sphericalangle\, l_3\, l_4 = \sphericalangle\, l_4\, l_2 = \frac{\varphi}{3}$?

4. Zwei Winkel α und β sind mit ihren Spitzen so zusammengelegt worden, dass sie dieselbe Winkelhalbirende

haben. Zu berechnen die Doppelverhältnisse zwischen ihren Schenkeln.

5. Auf vier durch einen Punkt S gehenden Strahlen l_1, l_2, l_3, l_4 sind die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 beliebig angenommen, zu beweisen, dass $D = (l_1, l_2, l_3, l_4) = \pm \frac{\Delta\, S P_1 P_3 \cdot \Delta\, S P_2 P_4}{\Delta\, S P_2 P_3 \cdot \Delta\, S P_1 P_4}$.

---

§ 3.

Perspektivität und Projektivität. Lage projektivischer Gebilde in einander. Die Involution. Das Imaginäre in der Geometrie.

1. Definition. Ein Strahlenbüschel und eine Punktreihe heissen perspektivisch aufeinander bezogen, wenn jedem Strahl (l) des Büschels derjenige Punkt (P) der Reihe zugeordnet wird, welcher auf diesem Strahl liegt (Fig. 20).

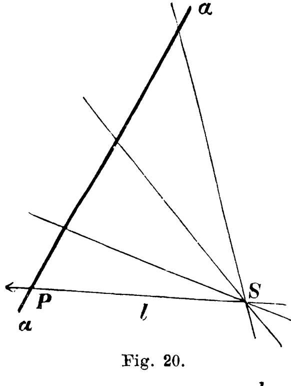


Fig. 20.

2. Definition: Zwei Punktreihen heissen perspektivisch zu einander, wenn sie zu demselben Strahlenbüschel perspektivisch liegen (Fig. 21a). P und Q zugeordnet.

Anmerkung: Der Schnittpunkt R beider Punktreihen spielt eine Doppelrolle, insofern man ihn zur einen und auch zur anderen Punktreihe rechnen kann. Augenscheinlich entspricht dieser Punkt „sich selbst".

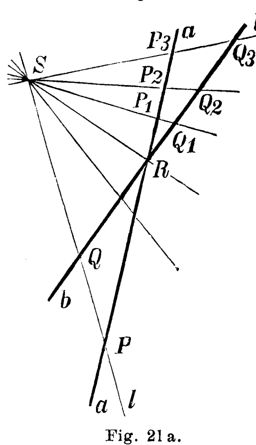
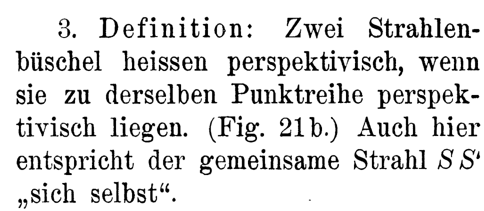


Fig. 21 a.



3. Definition: Zwei Strahlenbüschel heissen perspektivisch, wenn sie zu derselben Punktreihe perspektivisch liegen. (Fig. 21b.) Auch hier entspricht der gemeinsame Strahl SS' „sich selbst".

Satz 1: Sind ein Strahlenbüschel und eine Punktreihe perspektivisch aufeinander bezogen, so ist das Doppel-

verhältniss zwischen irgend vier Strahlen gleich dem entsprechenden Doppelverhältniss zwischen den zugeordneten Punkten.

Beweis: Man fälle von S das Lot $SO = \Delta$ auf die Gerade, wähle dieses Lot als Anfangsrichtung für das Strahlenbüschel und O als Anfangspunkt für die Punktreihe und zwar die Positivrichtung so, dass x mit m zugleich wächst. Dann ist

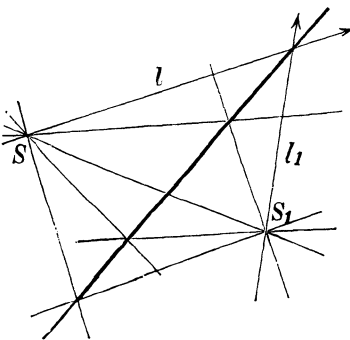


Fig. 21b.

$$x = \Delta \cdot \operatorname{tg} \varphi, \text{ d. i.}$$
$$x = \Delta \cdot m.$$

Dies ist eine lineare Substitution zwischen x und m (sogar eine sehr einfache). Nach § 1 ist daher der Satz bewiesen.

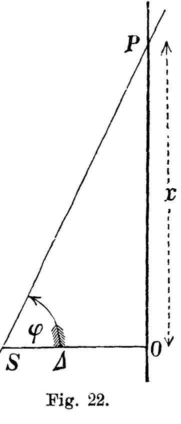


Fig. 22.

Folgerungen aus Satz 1:

Wenn zwei Punktreihen perspektivisch liegen, so sind entsprechende Doppelverhältnisse einander gleich, nämlich gleich dem Doppelverhältniss der vier zugehörigen Strahlen des zu ihnen perspektivischen Strahlenbüschels. Wenn zwei Strahlenbüschel perspektivisch liegen, so sind auch entsprechende Doppelverhältnisse einander gleich, nämlich gleich dem Doppelverhältniss der vier Punkte der Punktreihe, auf welche sie perspektivisch bezogen sind.

Damit ist die tiefe Bedeutung des Begriffes Doppelverhältniss mit einem Schlage erwiesen. Wie auch eine gerade Linie aa auf eine gerade Linie bb (Fig. 21a) durch Centralperspektive abgebildet wird, das Doppelverhältniss bleibt unverändert. Die einzelnen Strecken ändern sich, auch die einfachen Verhältnisse zwischen drei Punkten erhalten andere Werthe (ausgenommen, wenn das Centrum der Perspektive in die Unendlichkeit rückt [Parallelperspektive]), die Doppelverhältnisse aber kann keine Perspektive umwandeln, sie sind das Beständige bei dem Wechsel der Lage.

Insbesondere also bleiben harmonische Punkte und Strahlen auch nach der Perspektive harmonisch.

Nun sind wir auch im Stande, das Doppelverhältniss zwischen vier Strahlen eines „Parallelstrahlenbüschels“, d. h. eines aus parallelen Linien bestehenden Büschels, das als Strahlenbüschel mit unendlich fernem Centrum anzusehen ist, angemessen zu definiren, indem es gleich dem Doppelverhältniss der vier Punkte gesetzt wird, in denen irgend eine andere Gerade diese vier Strahlen schneidet. Denn dass die Lage dieser Graden hierbei nicht in Betracht kommt, geht daraus hervor, dass bei Parallelperspektive schon die einfachen Verhältnisse zwischen drei Punkten sich nicht ändern.

Gesetzt, ein Strahlenbüschel liege zu einer Punktreihe perspektivisch. Wenn nun hinterher etwa das Strahlenbüschel um sein Centrum gedreht wird, so geht offenbar die perspektivische Lage verloren, während die Gleichheit entsprechender Doppelverhältnisse bestehen bleibt. Dies führt zu einem allgemeineren Begriff als dem der Perspektivität, nämlich Projektivität. Dieselbe wird durch folgende Definition gegeben:

Definition. Zwei Strahlenbüschel heissen projektivisch aufeinander bezogen, wenn jedem Strahl des einen Strahlenbüschels ein Strahl des anderen derart zugeordnet wird, dass entsprechende Doppelverhältnisse gleich werden. Ein gleiches gilt für die Projektivität zweier Punktreihen, sowie einer Punktreihe und eines Strahlenbüschels.

Daraus geht sofort hervor: Zwei Gebilde, die beide auf ein drittes projektivisch bezogen sind, sind auch zu einander projektivisch.

Ferner ist nach § 1 hervorzuheben:

Der analytische Ausdruck für die allgemeinste projektivische Verwandtschaft ist die lineare Substitution.

Weiter: Zwei Gebilde können stets und zwar nur auf eine Weise derart projektivisch auf einander bezogen werden, dass irgend drei Elementen (Punkten oder Strahlen) des einen Gebildes irgend drei Elemente des anderen entsprechen.

Da perspektivisch liegende Gebilde nach obigem auch projektivisch sind, so ist die Perspektive ein besonderer Fall der Projektivität. Indessen kann doch wieder die allgemeine Projektivität auf Perspektivität zurückgeführt werden. Für gleichartige Gebilde, zwei Punktreihen oder zwei Strahlenbüschel, wird dies durch den Satz bewiesen:

Satz: Projektivische Punktreihen liegen perspektivisch, wenn der Schnittpunkt sich selbst entspricht; projektivische Strahlenbüschel, wenn der Verbindungsstrahl der Centren sich selbst entspricht.

Beweis (für 2 Punktreihen) (Fig. 23). Es seien $P_1\ P_2\ P_3$ und $Q'_1\ Q'_2\ Q'_3$ zwei projektivische Punktreihen. Der gemeinsame Schnittpunkt (mit P_1 und Q'_1 bezeichnet) soll sich selbst entsprechen. Man verbinde dann noch zwei andere zugehörige Punkte, z. B. P_2 mit Q'_2 und ebenso P_3 mit Q'_3 und betrachte den Schnittpunkt S als Centrum eines Strahlenbüschels, auf welches man nun die beiden Punktreihen perspektivisch also auch projektivisch bezieht. Dann sind offenbar den drei Punkten P_1, P_2, P_3 die drei Punkte Q'_1, Q'_2, Q'_3 zugeordnet. Da aber dieselbe Zuordnung auch bei der angenommenen projektivischen Lage besteht, so müssen beide projektivische Verwandtschaften zusammenfallen, womit der Satz bewiesen.

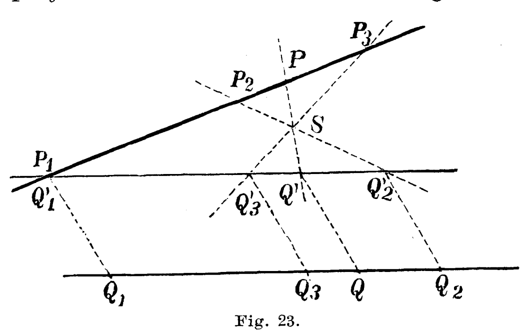


Fig. 23.

Sollen demnach zwei projektivische Punktreihen $P_1\ P_2\ P_3$ und $Q_1\ Q_2\ Q_3$ in perspektivische Lage gebracht werden, so lege man sie nur so, dass entsprechende Punkte, z. B. P_1 und Q_1 zusammenfallen (wobei die Punktreihen selbst aber nicht in eine und dieselbe Gerade zu liegen kommen dürfen). Analog wird der Beweis für zwei Strahlenbüschel geführt.

Handelt es sich aber um eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel (Fig. 24), so wähle man irgend drei Punkte P_1, P_2, P_3 der Reihe und die drei entsprechenden Strahlen des Büschels l_1, l_2, l_3 aus, schlage über $P_1\ P_2$ und $P_2\ P_3$ als Sehnen die

Kreise, welche $\sphericalangle l_1 l_2 = \alpha$ und $\sphericalangle l_2 l_3 = \beta$ als Peripheriewinkel fassen. Diese Kreise müssen sich, da sie beide durch P_2 hindurchgehen, noch in einem andern Punkte S' schneiden, den man als Centrum eines Strahlenbüschels betrachtet, das

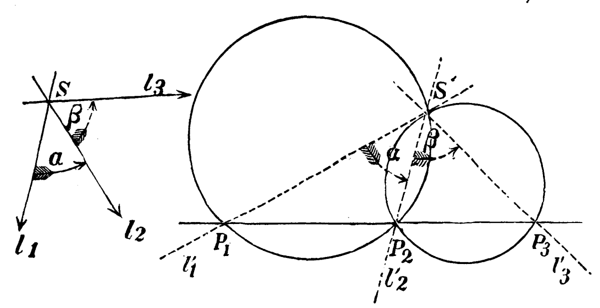


Fig. 24.

zur Punktreihe $P_1\ P_2\ P_3$ perspektivisch, also auch projektivisch liegt. Dann ist dieses Strahlenbüschel auch auf das gegebene Strahlenbüschel S projektivisch bezogen. Da aber nach der Construction l'_1, l_2', l'_3 zu einander dieselbe Lage haben wie l_1, l_2, l_3, so muss letztere Projektivität zur Congruenz werden, d. h. das Strahlenbüschel S' ist anzusehen als entstanden durch Drehung und Verschiebung des Büschels S. q. e. d.

Man kann also stets Projektivität betrachten als auseinander gerissene Perspektivität. So wichtig dies auch an sich ist, so unbequem sind die Constructionen bei etwaigen Anwendungen, weil erst in die perspektivische Lage verschoben und gedreht, nachher aber wieder zurückverschoben und gedreht werden muss.

Weit einfacher kommt man durch folgenden Satz zum Ziele.

Satz: Zu zwei projektivischen Punktreihen (Strahlenbüscheln) kann stets — und zwar auf unzählig viele Weisen — eine dritte Punktreihe (ein drittes Strahlenbüschel) gefunden werden, welches zu beiden perspektivisch liegt.

Beweis: (Für zwei Punktreihen.) Gegeben seien die beiden projektivischen Punktreihen $P_1 P_2 P_3 \ldots$ und $Q_1 Q_2 Q_3 \ldots$ Man verbinde P_1 mit Q_2 und betrachtet diese Linie als Träger einer dritten Punktreihe $R_1 R_2 R_3 \ldots$, die sowohl zu $P_1 P_2 P_3 \ldots$ als auch zu $Q_1 Q_2 Q_3 \ldots$ perspektivisch liegen soll. Dann muss R_1 mit P_1, R_2 mit Q_2 zusammenfallen, während Punkt R_3 beliebig angenommen werden kann. Hier ist er der Einfachheit wegen mit P_3 und Q_3 auf einer geraden Linie gewählt. Nun

bringe man noch $P_2 R_2$ und $P_3 R_3$ zum Schnitt in S und ebenso $Q_1 R_1$ und $Q_3 R_3$ zum Schnitt in S_1, beziehe S perspektivisch auf die Punktreihen $P_1 P_2 P_3$ und $R_1 R_2 R_3$, S_1 perspektivisch auf $Q_1 Q_2 Q_3$ und $R_1 R_2 R_3$, und die Aufgabe ist gelöst.

Soll jetzt zu irgend einem Punkte P_4 der entsprechende Punkt Q_4 gefunden werden, so ziehe man Strahl SP_4, bestimme so R_4, verbinde R_4 mit S_1, so ist der Schnittpunkt dieses Strahles mit der Punktreihe $Q_1 Q_2 Q_3$ der Punkt Q_4.

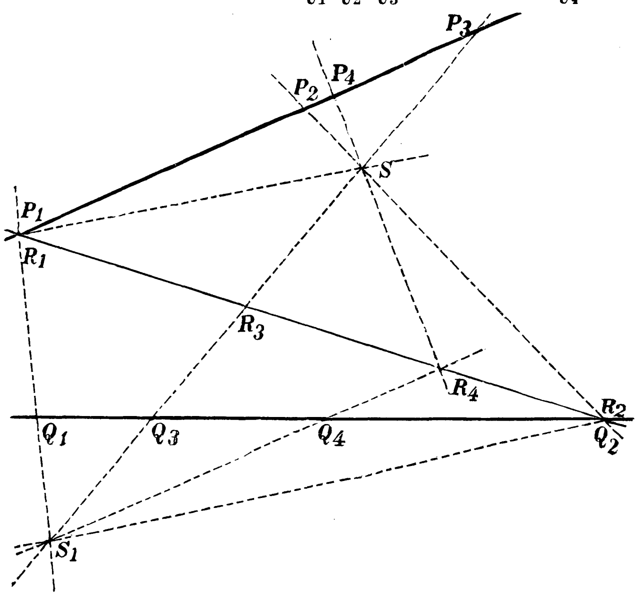


Fig. 25.

Entsprechend sind die Constructionen für zwei Strahlenbüschel. Liegt aber eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel vor, so bringe man letzteres erst mit irgend einer Geraden zum Schnitt und betrachte nun wie vorher die beiden Punktreihen.

Anmerkung: Die angegebenen Constructionen sind, wie man sagt, linear, weil sie einzig und allein auf dem Ziehen von Geraden zwischen gegebenen Punkten und der Aufsuchung der Schnittpunkte gegebener Geraden beruhen. Im Gegensatz hierzu sind die vorigen Constructionen dieses § (Fig. 23 und 24) nicht linear, da sich Verschiebungen und Drehungen in der Zeichnung

nicht ohne den Gebrauch des Zirkels ausführen lassen. Es leuchtet aber ein, dass lineare Construktionen in der Regel auch die einfacheren und praktischeren sein werden, wie dieser Fall zeigt.

In der That dürfte hier das Suchen nach einer einfacheren Construktion verlorene Mühe sein.

Lage projektiver Gebilde „ineinander". Die einzige Voraussetzung, welche bisher stillschweigend gemacht worden, ist die, dass die beiden Linien $P_1 P_2 P_3$ und $Q_1 Q_2 Q_3$ nicht zusammenfallen, weil dann die eine Punktreihe erst von irgend einem Strahlenbüschel aufgenommen und nun auf eine beliebige andere Gerade perspektivisch abgebildet werden müsste. Diese Ineinanderlage projektivischer Punktreihen (oder Strahlenbüschel) giebt aber Anlass zu den folgenden sehr wichtigen Betrachtungen:

Zunächst ist zu bemerken, dass jeder Punkt der Geraden dann zur ersten und auch zur zweiten Punktreihe gerechnet werden kann. Es sei P ein solcher Punkt, der zur ersten Punktreihe gerechnet werde, und Q der entsprechende Punkt der zweiten. Ihre Abscissen x und x' mögen auf denselben Punkt O als Anfangspunkt bezogen werden.

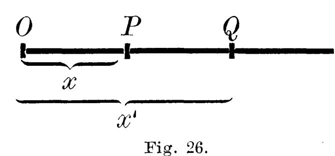


Fig. 26.

Nach § 1 wird auch hier die Projektivität durch eine lineare Gleichung

$$x' = \frac{a + bx}{c + dx} \tag{6}$$

ausgedrückt.

Der Punkt $Q(x')$ ist im allgemeinen von $P(x)$ verschieden, doch kann es sich sehr wohl treffen, dass beide Punkte zusammenfallen, dass gelegentlich ein Punkt „sich selbst" entspricht. Solcher Punkte kann es aber nie mehr als zwei geben, da schon das Zusammenfallen dreier Punkte völlige Identität bedingt, in welchem Falle allerdings mehr als zwei, nämlich alle Punkte sich selbst entsprechen.

Um aber in jedem anderen Falle die zusammenfallenden

Punkte zu finden, setze man in 6) $x' = x$. Nach Fortschaffung des Nenners entsteht dann die quadratische Gleichung

$$dx^2 + (c - b)\,x - a = 0$$

mit den Wurzeln

$$x = \frac{b - c \pm \sqrt{(b - c)^2 + 4\,ad}}{2\,d}. \qquad 6')$$

Je nachdem also $(b - c)^2 + 4\,ad \gtrless 0$, fallen zweimal oder überhaupt nicht entsprechende Punkte zusammen. [Ist $\Delta = bc - ad$ negativ, so liegt immer der erste Fall vor, da $(b - c)^2 + 4\,ad = (b + c)^2 - 4\,\Delta$]. Wenn aber $(b - c)^2 + 4\,ad = 0$, so giebt es nur einen sich selbst entsprechenden Punkt, der indessen als zwei solche angesehen werden muss, die hier ineinander liegen.

Anmerkung: Hier wird die Verneinung der Existenz der gesuchten Punkte dadurch angezeigt, dass die Abscissen nicht reell, sondern imaginär werden (oder vielmehr complex von der Form $\alpha + \beta i$). Wenn nun auch derartige imaginäre Abscissen, wie überhaupt imaginäre Werthe für solche Grössen, die ihrer Natur nach nur reell sein können, keine reale Existenz haben, so werden sie doch oft rechnungsgemäss eingeführt, worauf man von imaginären Punkten u. s. w. reden kann. Der Sinn dieser Bezeichnung kann nicht missverstanden werden; es soll mit ihr eben nur gesagt sein, dass die Rechnung imaginäre Werthe ergeben habe. Uebrigens zeigt sich in diesem Falle, wie immer, wenn man von reellen Grössen ausgeht, dass die imaginären Werthe paarweise „conjugirt“ auftreten, derart, dass wenn ein Werth von der Form $\alpha + \beta i$ wird, der andre $= \alpha - \beta i$ sein muss. Durch symmetrische (rechnerische) Verbindung beider entstehen dann wieder reelle Zahlen; so ist z. B. die Summe $= (\alpha + \beta i) + (\alpha - \beta i) = 2\,\alpha$ und auch das Produkt $(\alpha + \beta i)\,(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2$ reell.

Die beiden durch die Formel 6') dargestellten Punkte nennt man Doppelpunkte der Projektivität. Ob sie reell oder imaginär sind, ihre Mitte ist immer ein reeller Punkt, der durch die Formel

$$x = \frac{b - c}{2\,d}$$

bestimmt wird. Wählt man ihn zum Anfangspunkt (aus-

genommen, dass $d = 0$, weil er dann in die unendliche Ferne rückt, und die Perspektivität sich in Aehnlichkeit oder Proportionalität verwandelt), so wird $b = c$ und die Formel 6) giebt:

$$x' = \frac{a + bx}{b + dx} \qquad 6'')$$

während die Doppelpunkte die Abscissen erhalten

$$x = \pm \sqrt{\frac{a}{d}}$$

Je nachdem dann also a und d gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, sind die Doppelpunkte reell oder imaginär. Ist $a = 0$, so fallen sie beide zusammen. Ist $d = 0$, so wird die Transformation 6'') $x' = x + \frac{a}{b}$, die Projektivität entsteht durch einfache Verschiebung um das Stück $\frac{a}{b}$ und die Doppelpunkte fallen beide mit dem unendlich fernen Punkt zusammen.

Begriff der Involution: Kehren wir aber wieder zur allgemeinen Gleichung 6) zurück. Wenn in derselben $b = -c$ ist, so wird die Substitution nach § 1 involutorisch, was zur unmittelbaren Folge hat, dass jedem Punkte der Geraden, ob man ihn als Punkt der ersten oder der zweiten Punktreihe als einen Punkt $P(x)$ oder einen Punkt $Q(x')$ nimmt, nur ein Punkt entspricht. Die Beziehung zwischen x und x' wird eben eine gegenseitige, eine vertauschbare, eine involutorische, wie auch unmittelbar aus der Formel

$$x' = \frac{a + bx}{-b + dx} \qquad 7)$$

hervorgeht, wenn der Nenner entfernt wird, worauf diese Gleichung die Form erhält

$$dxx' - b\,(x + x') - a = 0. \qquad 7)$$

Auch in diesem Falle sind Doppelpunkte (reelle oder imaginäre) vorhanden, deren Mitte (der Mittelpunkt der Involution) durch die Gleichung $x = \frac{b}{d}$ bestimmt wird. Macht man ihn zum Anfangspunkt, so wird $b = 0$ und die Gleichung 6'') vereinfacht sich in:

$$x \cdot x' = \frac{a}{d}, \qquad 7')$$

oder auch $$x \cdot x' = \xi^2$$

wenn ξ der Abstand der Doppelpunkte von der Mitte ist. Die Anwendung des Satzes 12) § 1 giebt daher unmittelbar den schönen Satz:

Irgend zwei zusammengehörende Punkte einer Involution bilden mit den beiden Doppelpunkten vier harmonische Punkte.

Eine besonders einfache Art der Involution entsteht, wenn $d = 0$. Die Gleichung 7) giebt dann $x + x' = -\frac{a}{b}$.

Verschiebt man noch den Anfangspunkt um $-\frac{a}{2b}$, und führt demnach neue Abscissen ξ und ξ' durch die Gleichungen ein:

$$x = \xi - \frac{a}{2b} \text{ und also auch } x' = \xi' - \frac{a}{2b}$$

so wird noch einfacher:

$$\xi + \xi' = 0, \; \xi' = -\xi.$$

Die Involution verwandelt sich in Symmetrie zum Anfangspunkt (entstanden durch Spiegelung). Insofern ist Involution auch anzusehen als Erweiterung des allbekannten Symmetriebegriffes. Symmetrie ist eine solche Involution, deren einer Doppelpunkt mit dem unendlich fernen Punkt zusammenfällt.

Satz: Findet sich nur ein einziges Mal bestätigt, dass bei der Ineinanderlage zweier projektiver Punktreihen einem Punkt P ein und derselbe, aber von P verschiedene Punkt P' entspricht, zu welcher Reihe auch P gerechnet wird, so tritt dies immer ein, und die Projektivität wird zur Involution.

Beweis: Die Projektivität sei durch die Gleichung 6):

$$x' = \frac{a + bx}{c + dx}$$

oder auch:

$$dxx' + cx' - bx - a = 0.$$

Es seien hier für x und x' die Koordinaten der beiden Punkte P und P' eingesetzt worden. Da für diese Punkte die Vertauschbarkeit vorausgesetzt wird, so folgt auch:

$$dx'x - cx - bx' - a = 0.$$

Durch Subtraction entsteht die neue Gleichung:

$$(x' - x) \cdot (b + c) = 0,$$

also entweder $x' = x$, d. h. P fällt mit P' zusammen, P entspricht sich selbst, oder $b + c = 0$, d. h. Involution (nach 7). Da die erste Alternative aber hier ausdrücklich ausgeschlossen, so bleibt nur die zweite übrig. q. e. d.

Das wechselseitige Entsprechen der involutorischen Verwandtschaft wird auch durch folgenden für spätere Abschnitte dieses Buches wichtigen Satz erläutert:

Wenn eine quadratische Gleichung von der Form:

$$(ax^2 + bx + c) + \lambda\,(a_1x^2 + b_1x + c_1) = 0 \qquad 8)$$

oder

$$x^2\,(a + \lambda a_1) + x\,(b + \lambda b_1) + (c + \lambda c_1) = 0 \qquad 8)$$

gegeben ist, deren Coefficienten ganze, lineare Funktionen eines „Parameters“ λ sind, so wird durch Zuordnung der Wurzeln dieser Gleichung eine Involution erzeugt.

Beweis: Es seien x und x' die Wurzeln von 8). Dann ist nach der Theorie der quadratischen Gleichungen:

$$x + x' = -\frac{b + \lambda b_1}{a + \lambda a_1}, \text{ also } \lambda = -\frac{b + a\,\,(x + x')}{b_1 + a_1\,(x + x')},$$

$$xx' = +\frac{c + \lambda c_1}{a + \lambda a_1}, \text{ d. h } \lambda = -\frac{c - a\,xx'}{c_1 - a_1\,xx'}.$$

Durch Elimination von λ folgt daher:

$$\frac{b + a\,\,(x + x')}{b_1 + a_1\,(x + x')} = \frac{c - a\,xx'}{c_1 - a_1\,xx'},$$

oder nach Ausmultiplication:

$$xx'\,(ab_1 - ba_1) + (x + x')\,(ac_1 - ca_1) + (bc_1 - cb_1) = 0,$$

d. h. wieder eine Gleichung von der Form. 7), womit der Satz bewiesen ist.

Bemerkung: Dieser Satz ist deswegen wichtig, weil er gestattet, den Begriff der Involution zu erweitern, indem in 8) Funktionen dritten, vierten u. s. w. Grades an Stelle der quadratischen Funktionen gesetzt werden. So entstehen ausser der hier betrachteten (der sogenannten quadratischen Involution) die Involutionen dritten, vierten u. s. w. Grades, bei welchen je drei, je vier Punkte u. s. w. zusammengehören.

Eine Involution ist durch zwei Punktpaare bestimmt. Sollen drei Punktpaare einer Involution angehören, so dürfen sie daher nicht willkürlich ausgewählt werden. Solche drei Punktpaare nennt man auch eine Involutionsgruppe.

Kommen wir noch einmal auf die allgemeine Ineinanderlage projektivischer Gebilde, von der die Involution ein specieller Fall ist, zurück. Es seien A und B die beiden Doppelpunkte und P und Q, sowie P_1 und Q_1 zugehörige Punktpaare. Dann entsprechen den vier Punkten

Fig. 27.

$$A,\ B,\ P,\ P_1$$

der ersten Reihe die vier Punkte

$$A,\ B,\ Q,\ Q_1$$

der zweiten Reihe. Daher:

$$(A\ B\ P\ P_1) = (A\ B\ Q\ Q_1),$$

d. h.

$$\frac{(A\ B\ P)}{(A\ B\ P_1)} = \frac{(A\ B\ Q)}{(A\ B\ Q_1)},$$

also auch

$$\frac{(A\ B\ P)}{(A\ B\ Q)} = \frac{(A\ B\ P_1)}{(A\ B\ Q_1)},$$

d. h.

$$(A\ B\ P\ Q) = (A\ B\ P_1\ Q_1).$$

Also: Sind A und B die beiden Doppelpunkte der Projektivität und P ein Punkt der ersten, Q der entsprechende Punkt der zweiten Punktreihe, so ist das Doppelverhältniss:

$$(A\ B\ P\ Q)$$

von der Wahl der Punkte P und Q ganz unabhängig, sein Werth ist eine Invariante. (Wird dieselbe $= + 1$, so wird die Projektivität zur Identität, wird sie $= - 1$, so zur Involution).

Selbstredend gelten die allgemeinen Betrachtungen über die Ineinanderlage von Punktreihen auch für mit ihrem Centrum zusammenliegende projektivische Strahlenbüschel. Daher mögen nur noch einige besondere Bemerkungen über dieselben folgen.

1. Es liege eine Involution vor, so dass, wenn m und m' die Richtungsconstanten entsprechender Strahlen werden, nach 7) die Gleichung besteht:

$$m' = \frac{a + bm}{- b + dm}$$

oder

$$dmm' - b\,(m + m') - a = 0. \qquad \textbf{9)}$$

Unter den unendlich vielen conjugirten Strahlen giebt es dann ein Paar zu einander senkrechter. Denn fügt man die Bedingung des Senkrechtstehens:

$$mm' = -1$$

hinzu, so folgt:

$$m + m' = -\frac{d + a}{b},$$

also werden m und m' Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$m^2 + \frac{d + a}{b} \cdot m - 1 = 0,$$

welche stets reelle Wurzeln hat.

Die so gefundenen Strahlen mögen Mittelstrahlen der Involution heissen. Wählt man die Anfangsrichtung auf einen von ihnen, dann wird in 9) $b = 0$ (da dem Werth $m = 0$ der Werth $m' = \infty$ entsprechen muss) und die Gleichung 9) vereinfacht sich in:

$$m \cdot m' = +\frac{a}{d} = k \quad \text{(siehe 7')} \qquad \mathbf{9'})$$

Je nachdem nun k positiv oder negativ, sind die beiden Doppelstrahlen reell oder imaginär. Ist im besonderen $k = -1$, so ist jedem Strahl der zu ihm senkrechte zugeordnet.

2. Die Projektivität sei Congruenz, also entstanden durch Drehung um einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente $= a$ gesetzt werde. Nach § 2 Formel 4) lautet dann die Gleichung zwischen m und m'

$$m' = \frac{m - a}{1 + ma}.$$

Offenbar giebt es hier keine Doppelstrahlen, sie werden imaginär. In der That folgt aus dem Ansatz: $m = m'$ die Gleichung

$$(m^2 + 1) \cdot a = 0,$$

also entweder $a = 0$, d. h. Identität, oder $m^2 + 1 = 0$, $m = \pm i$.

Bemerkung: Die beiden Strahlen, deren Richtungsconstanten $= \pm i$ sind, bleiben also sozusagen bei der Drehung unveränderlich. Sie werden Nullstrahlen genannt und haben für viele Gebiete der Geometrie hohe Bedeutung. Beim Uebergang von der Tangente zum Sinus und Cosinus findet man letztere unendlich gross; denn es wird hier:

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\pm i}{\sqrt{1 + i^2}} = \pm \frac{i}{0} = \infty,$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + i^2}} = \frac{1}{\sqrt{0}} = \infty.$$

Ein Nullstrahl steht auf sich selbst senkrecht. Denn setzt man $m = i$, so findet man für den senkrechten Strahl

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{i} = i$$

also $m' = m = i$. **3)**

Ueberhaupt bildet ein Nullstrahl mit sich selbst jeden Winkel. Denn setzt man in den Ausdruck 3) § 2 für den relativen Richtungscoefficienten, nämlich

$$\frac{m - m'}{1 + m\,m'}$$

$m = m' = \pm i$, so erhält der Bruch die Form $\frac{0}{0}$.

Man beherzige aber, dass nicht jede imaginäre Gerade ein Nullstrahl ist, sondern nur eine solche, deren Richtungscoefficient $= + i$ oder $= - i$ ist.

3. Die Projektivität sei Symmetrie, bei welcher einer Drehung eines Strahls des ersten Büschels um den Winkel φ eine Drehung im anderen Büschel um den Winkel $- \varphi$ entspricht. Man erhält eine solche Verwandtschaft offenbar stets, wenn das erste Strahlenbüschel um einen beliebigen Winkel, dessen Tangente $= a$ gesetzt werde, gedreht und dann um die neue Anfangsrichtung „umgeklappt", d. h. aus der Ebene heraus um 180° gedreht wird, bis es wieder in die Ebene fällt. Die Gleichung zwischen m und m' wird dann nach § 2

$$- m' = \frac{m - a}{1 + m\,a}$$

oder

$$m' = \frac{a - m}{1 + a\,m}.$$

Daher ist nach 9) auch hier die Symmetrie ein besonderer Fall der Involution. Um die Doppelstrahlen zu ermitteln, setze man $m' = m$, worauf sich ergiebt

$$m^2 + \frac{2m}{a} - 1 = 0.$$

Diese Gleichung hat stets zwei reelle Wurzeln, deren Produkt $= - 1$ ist. Die beiden Doppelstrahlen stehen daher senkrecht auf einander. Wählt man auf einem von ihnen die Anfangsrichtung, so wird $a = 0$ und die vorige Bedingungsgleichung für m und m' verwandelt sich in:

$$m' = - m$$

womit die Symmetrie offen zu Tage liegt.

Eine schöne und wichtige Anwendung der Theorie projektivischer und perspektivischer Strahlenbüschel und Punktreihen bildet die Ableitung der harmonischen Eigenschaften des sogenannten vollständigen Vierecks und des vollständigen Vierseits.

Erklärung. 1. Unter einem vollständigen Viereck versteht man irgend vier gegebene Punkte A, B, C, D (Fig. 28)

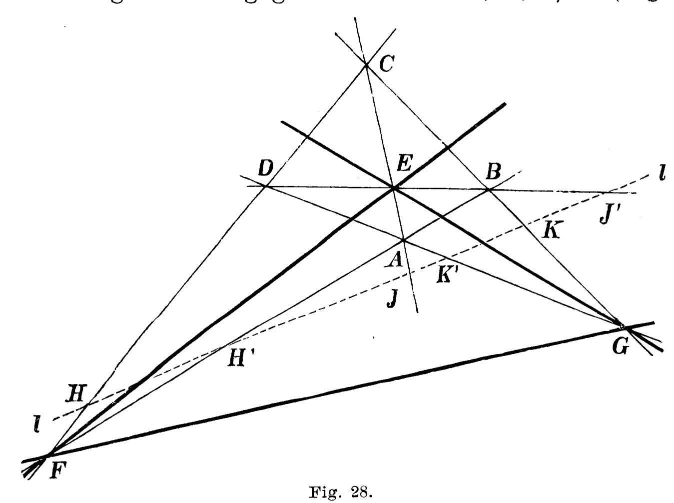


Fig. 28.

mit sämmtlichen 6 Verbindungslinien, jede unbegrenzt gedacht. Sie heissen die Seiten des Vierecks und trennen sich in drei Paare (AB und CD, AC und BD, AD und BC) von Gegenseiten, die sich in den drei Punkten E, F, G, den Ecken des „Diagonaldreiecks" schneiden. 2. Ein vollständiges Vierseit (Fig. 29) besteht aus vier gegebenen Geraden mit ihren 6 Schnittpunkten, den Ecken des Vierseits, die sich paarwéise gegenüber liegen. Die drei Verbindungslinien e, f, g der

Gegenecken nennt man Diagonalen, die wieder die Seiten des „Diagonaldreiecks" bilden.

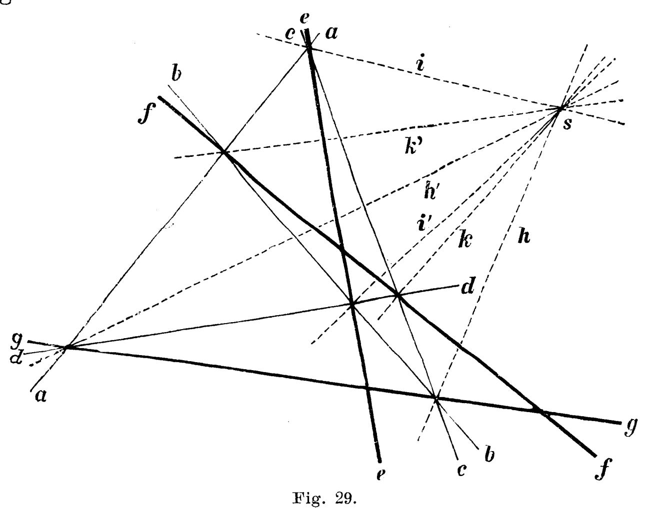


Fig. 29.

Satz: In jedem vollständigen Viereck bilden zwei Gegenseiten und die durch ihren Schnittpunkt gehenden Seiten des Diagonaldreiecks vier harmonische Strahlen, und reciprok:

In jedem vollständigen Vierseit bilden zwei Gegenecken mit den auf ihrer Verbindungslinie liegenden Ecken des Diagonaldreiecks vier harmonische Punkte.

Beweis (für ein Viereck): Man beziehe die Strahlenbüschel E und F perspektivisch auf die Punktreihe CBG so folgt:

$$(EF, EG, EB, EC) = (FE, FG, FB, FC).$$

Bezieht man sie aber perspektivisch auf die Punktreihe DAG, so folgt ebenso:

$$(EF, EG, EB, EC) = (FE, FG, FC, FB).$$

Daher

$$(FE, FG, FC, FB) = (FE, FG, FB, FC).$$

Nach § 1 Seite 15 ist der gemeinsame Werth dieser Doppelverhältnisse, wenn sie überhaupt einander gleich sind, wie hier, entweder $= +1$ oder $= -1$. Der erstere Fall ist ausgeschlossen, (weil dann zwei Strahlen zusammenfallen müssten). Also bleibt:

$$(FE, FG, FC, FB) = -1. \quad \text{q. e. d.}$$

Ganz ensprechend ist der Beweis für das Vierseit.

Bemerkung: Diese Sätze ermöglichen, wie man sieht, eine lineare Konstruktion des vierten harmonischen Punktes oder Strahles.

Satz: Die 6 Schnittpunkte HH', JJ', KK' der 6 Seiten eines Vierecks mit irgend einer Graden bilden eine Involutionsgruppe. Dasselbe gilt für die 6 Strahlen von irgend einem Punkt nach den 6 Ecken eines Vierseits. Fig. 28) und 29).

Beweis (für das Viereck): Man beziehe die Geraden HJ' und DB perspektivisch auf einander erst durch das Centrum A, dann durch das Centrum C. Es folgt dann:

$$(D, B, E, J') = (K', H', J, J')$$
$$(D, B, E, J') = (H, K, J, J')$$

also:

$$(K', H', J, J') = (H, K, J, J'.)$$

Nun ist aber nach § 1 Seite 11:

$$(K', H', J, J') = (H', K', J', J),$$

daher endlich:

$$(H', K', J', J) = (H, K, J, J').$$

Hier entsprechen sich, wie man sieht, J und J' wechselseitig. Nach den vorangegangenen Betrachtungen über Involutionen (Seite 41) muss daher ein Gleiches für H und H', sowie für K und K' gelten. q. e. d.

Aufgaben.

1. In einer perspektivischen Zeichnung sollen vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 in gerader Linie, die ursprünglich durch gleiche Abstände getrennt waren, enthalten sein. Nachher findet sich, dass P_4 vergessen worden ist und deshalb soll seine Lage hinterher durch Rechnung festgestellt werden. Hierzu misst man die Abscissen von P_2 und P_3 in Bezug auf P_1 als Anfangspunkt und findet $x_2 = +7,6$, $x_3 = +13,9$. Wie gross wird x_4? Wie gross ist die Abscisse des Verschwindepunktes? (d. h. des Punktes, der ursprünglich unendlich fern war).

2. Die Striche der Skala eines Aräometers zur Bestimmung der Dichtigkeit von Flüssigkeiten schreiten nicht mit der Dichtigkeit in gleichmässigen Abständen fort, wohl aber in einer perspektivischen Projektion derselben. Durch Versuche wurden zuerst die den Dichtigkeiten 1,0, 0,9 und

0,8 entsprechenden Skalenstriche bestimmt und zwar ergaben sich die Abstände von 1,0 bis 0,9 = 48,13 mm von 0,9 bis 0,8 = 60,18 mm. Nimmt man den Strich 1,0 als Anfangspunkt und zählt die Abscissen nach oben positiv (je kleiner die Dichte, desto tiefer taucht das Aräometer ein), so sollen die Abscissen der Zwischenstriche 0,99, 0,98 ... bis 0,81 berechnet werden (auf zwei Dezimalen).

3. Zwei Seiten eines Dreiecks und die Transversale nach der Mitte der dritten Seite haben der Reihe nach, bezogen auf irgend eine Anfangsrichtung die Richtungscoefficienten

$$+0,2, +2,7, +5,3.$$

Zu berechnen der Richtungscoefficient der dritten Seite.

4. Von einem vollständigen Viereck kennt man die Richtungscoefficienten von 5 Seiten $P_1 P_2$, $P_2 P_3$, $P_3 P_1$, $P_1 P_4$, $P_2 P_4 = -1$, $+5$, $+3$, -4, ∞ (bezogen auf irgend eine Anfangsrichtung). Der Richtungscoefficient der sechsten Seite ist zu ermitteln.

---

§ 4.

Das cartesische Koordinatensystem. Rechtwinklige, schiefwinklige und Polarkoordinaten. Transformationsformeln.

Lagenbestimmungen sind, wie bereits in § 1 und § 2 bemerkt, niemals absolut, sondern immer nur relativ, und um sie einheitlich zu machen, muss eine Grundfigur angenommen werden, auf welche man alle in Betracht kommenden Punkte, Linien, Figuren u. s. w. bezieht.

Eine solche, und zwar die einfachste und beste, hat Cartesius im Jahre 1637 in die Mathematik durch das nach ihm benannte Koordinatensystem eingeführt. Es besteht (Fig. 30) aus zwei zu einander senkrechten, unbegrenzt gedachten Geraden, den Achsen des Systems, gewöhnlich x- und y-Achse genannt, die sich im Koordinatenanfangspunkt O schneiden. Auf beiden wird eine Richtung als positiv, die entgegengesetzte Richtung als negativ eingeführt (hier die x-Achse nach rechts $+$, nach links $-$, die y-Achse nach oben $+$, nach unten $-$). Zur Feststellung der Lage irgend eines

Punktes P giebt man dann an, wie weit er von den Achsen entfernt ist und in welchem Sinne er von ihnen abweicht (nach links oder nach rechts, nach oben oder nach unten).

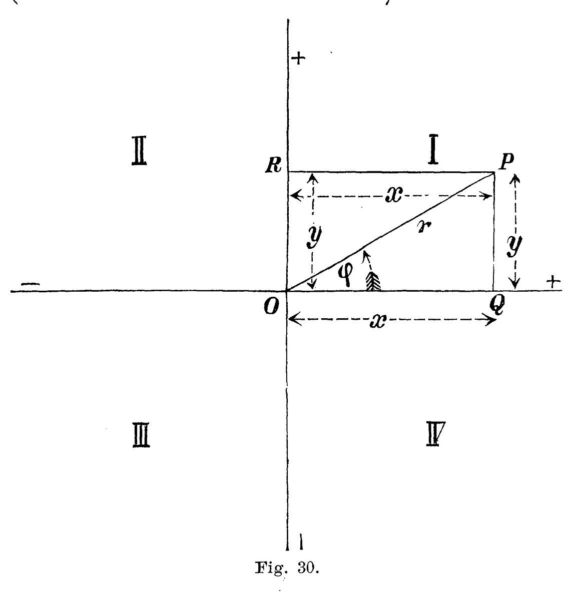


Fig. 30.

Oder auch, man führe, was dasselbe ist, die Entfernungen $OQ = x$ und $OR = y$ der beiden Projektionen Q und R vom Anfangspunkt ein, wobei diese Entfernungen positiv oder negativ genommen werden, je nachdem Q und R vom Anfangspunkt aus in der positiven oder negativen Richtung der zugehörigen Achse liegen. Werden diese Entfernungen vermittelst der gewählten Längeneinheit durch Zahlen ausgedrückt, denen dann die Vorzeichen $+$ oder $-$ gegeben werden, so werden $OQ = x$ und $OR = y$ zu algebraischen, mit Vorzeichen behafteten Zahlen. Sie heissen die Koordinaten des Punktes P und werden unterschieden als Abscisse x und Ordinate y.

Man pflegt die x-Achse horizontal, ihre Positivrichtung nach rechts zu nehmen, die y-Achse vertikal, mit der $+$-Richtung nach oben. Ferner wird meist die Richtung der $+x$-Achse als Anfangsrichtung genommen, von welcher aus die Richtungswinkel entgegengesetzt zum Uhrzeiger positiv gesetzt werden, wie in § 2 auseinandergesetzt. Danach ist der Richtungswinkel der $+x$-Achse $= 0$, der $+y$-Achse $= +90^\circ$, der $-x$-Achse $= +180^\circ$, der $-y$-Achse $= +270^\circ$ (oder -90°).

Die Ebene wird durch die Achsen in vier Quadranten I, II, III, IV getheilt, denen die verschiedenen Vorzeichen-

kombinationen der Koordinaten entsprechen, wie die kleine Tabelle angiebt:

Quadrant	Vorzeichen von x	Vorzeichen von y
I	+	+
II	—	+
III	—	—
IV	+	—

Bemerkung: Es ist ungenau, zu sagen, ein Punkt der x-Achse habe kein y, ein Punkt der y-Achse kein x; vielmehr sind die Koordinaten des Punktes $Q:x$ und o, des Punktes $R:o$ und y und die des Anfangspunktes sind beide o und o.

Statt des rechtwinkligen kann man auch ein schiefwinkliges System einführen und darauf eine Koordinatenbestimmung gründen, wie Figur 31 zeigt. Diese Bestimmung ist zwar allgemeiner, da nur der Koordinatenwinkel $\omega = 90^0$ gesetzt zu werden braucht, wenn man zum rechtwinkligen System zurückkehren will, sie ist aber durchaus nicht

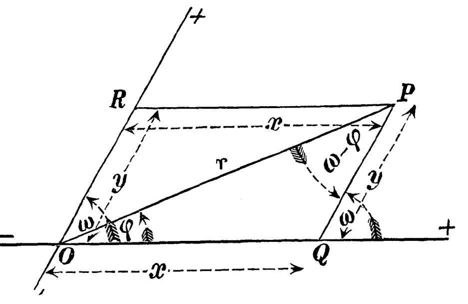


Fig. 31.

vortheilhafter. Denn alles, was das schiefwinklige Koordinatensystem leisten kann, nämlich eine einheitliche Lagenbestimmung, leistet auch das rechtwinklige, und das letztere hat den Vorzug einfacherer Grundformeln. Nur wenn gelegentlich zwei schief zu einander stehende Linien eine bevorzugte Rolle spielen, empfiehlt sich zuweilen der Gebrauch schiefwinkliger Koordinaten. Allerdings erweist sich, wie in den letzten §§ dieses Buches hervortreten wird, das Cartesische System für ein bestimmtes Gebiet der Geometrie als zu eng, das schiefwinklige aber auch, weshalb die Mathematiker sich hier noch eine neue Grundfigur, bestehend aus irgend einem Dreieck und „Dreieckskoordinaten“ gebildet haben. (Siehe § 19.)

Aufgabe: Gegeben ein Punkt $P(x, y)$ in rechtwinkligen Koordinaten. Zu berechnen seinen Abstand von O (den Radiusvector $OP = r$) und den Richtungswinkel φ dieses Radiusvectors.

Die Formeln sind unmittelbar aus der Figur 30 abzulesen. Es ist:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos\varphi &= \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi &= \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \operatorname{tg}\varphi &= m = \frac{y}{x}, \\ \operatorname{cotg}\varphi &= \frac{1}{m} = \frac{x}{y}. \end{aligned} \qquad 1)$$

Hier wird r meist absolut, die Wurzel also positiv genommen. Dann gelten die Formeln 1), in welchem Quadranten auch P liegen mag. Sind umgekehrt r und φ gegeben, so findet man x und y durch die Formeln:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\varphi \\ y &= r \cdot \sin\varphi. \end{aligned} \qquad 2)$$

r und φ, der Radiusvektor und sein Richtungswinkel, bestimmen augenscheinlich die Lage von P, wie x und y selbst. Sie heissen darum auch Koordinaten von P und zwar Polarkoordinaten. Den verschiedenen Werthen von r entsprechen concentrische Kreise um O als Mittelpunkt, den verschiedenen Werthen von φ die senkrecht hindurchgehenden Radien.

Bemerkung: Die Polarkoordinaten r und φ eignen sich wenig zu allgemeinen geometrischen Untersuchungen, was aber nicht ausschliesst, dass sie in besonderen Fällen vortreffliche Dienste leisten.

Der Uebergang von schiefwinkeligen zu Polarkoordinaten ist zwar auch leicht zu finden; die zugehörigen Formeln sind aber nicht ganz so einfach.

Zunächst giebt der Cosinussatz (Fig. 31):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 - 2\,xy\,(\cos 180^0 - \omega)} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2\,xy \cos\omega}.$$

Dann folgt aus dem Sinussatz:

$$\sin\varphi : \sin(\omega - \varphi) : \sin\omega = y : x : r,$$

also:

$$\sin\varphi = \frac{y \cdot \sin\omega}{r} = \frac{y \cdot \sin\omega}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2\,xy\cos\omega}}.$$

$$\sin(\omega - \varphi) = \frac{x \cdot \sin\omega}{r} = \frac{x \cdot \sin\omega}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2\,xy\cos\omega}}.$$

Will man aber $\mathrm{tg}\,\varphi = m$ entwickeln, so bedarf es noch einer weiteren Rechnung. Es ist

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\omega - \varphi)} = \frac{y}{x} = \frac{\sin\varphi}{\sin\omega\cos\varphi - \cos\omega\sin\varphi} = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\sin\omega - \cos\omega\,\mathrm{tg}\,\varphi}$$

$$= \frac{m}{\sin\omega - \cos\omega \cdot m}$$

und hieraus endlich durch Umkehrung:

$$m = \frac{y \cdot \sin\omega}{x + y\cos\omega}.$$

Die umgekehrten Transformationen von Polarkoordinaten zu schiefwinkligen sind:

$$x = r \cdot \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega}$$

$$y = r \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\omega}.$$

Das Problem der Koordinatentransformation.

An und für sich hat ein Punkt überhaupt keine Koordinaten, sondern nur in Bezug auf ein vorher gewähltes Koordinatensystem. Aendert man das letztere, so ändern sich auch die Koordinaten desselben Punktes und es entsteht die Frage nach dieser Aenderung oder das so wichtige Problem der Koordinatentransformation.

Um dasselbe ganz allgemein zu behandeln, nehme man an, dass irgend ein schiefwinkliges Koordinatensystem verlassen und zu irgend einem andern schiefwinkligen Koordinatensystem übergegangen werden soll. Dann muss zunächst die Lage des zweiten Systems zum ersten gegeben sein und hierzu sind fünf Angaben nöthig, als welche man nehmen kann. (Fig. 32).

1. Den Koordinatenwinkel ω des ersten Systems.
2. „ „ ω' des zweiten Systems.
3. und 4. Die Koordinaten a und b des neuen Anfangspunktes O' in Bezug auf das alte System.

5. Den Richtungswinkel φ der neuen $+x'$-Achse in Bezug auf die alte $+x$-Achse als Anfangsrichtung.

Wenn nun ein beliebiger Punkt P im alten System die Koordinaten x und y besitzt und im neuen die Koordinaten x' und y', so muss es möglich sein, das erste Paar durch das zweite und das zweite durch das erste auszudrücken. Suchen wir diese Ausdrücke!

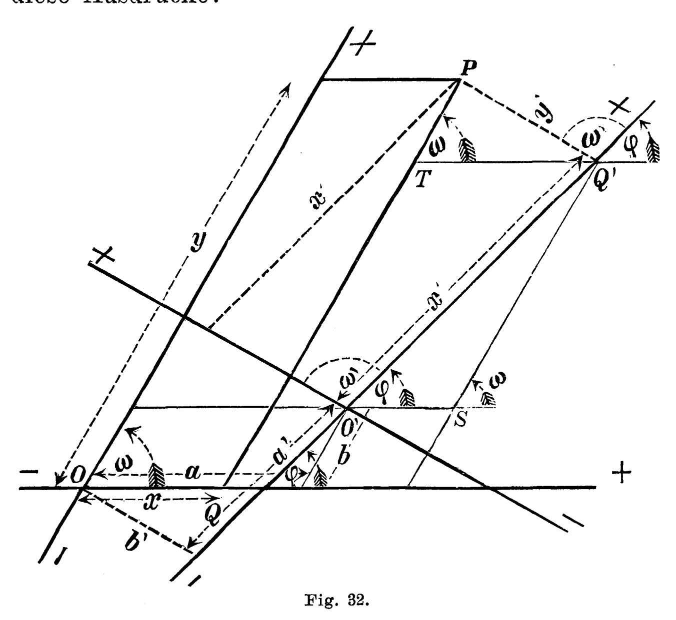


Fig. 32.

Man gelangt am schnellsten zu ihnen, wenn durch O' und Q' die Parallelen zur x- und y-Achse gezogen und so die Punkte S, T bestimmt werden. Es wird dann nach der Figur:

$$x = a + O'S - TQ'$$
$$y = b + SQ' + TP.$$

Die vier Strecken $O'S$, SQ', TQ', TP ergeben sich aber sofort aus den Dreiecken $O'SQ'$ und $TQ'P$ nach dem Sinussatz. Man erhält:

$$x' : O'S : SQ' = \sin\omega : \sin(\omega - \varphi) : \sin\varphi.$$
$$y' : TQ' : TP = \sin\omega : \sin(\omega' - \omega + \varphi) : \sin(\omega' + \varphi).$$

Daher:

$$O'S = x' \cdot \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega}, \quad SQ' = x' \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\omega}.$$

$$TQ' = y' \cdot \frac{\sin(\omega' - \omega + \varphi)}{\sin \omega}, \quad TP = y' \cdot \frac{\sin(\omega' + \varphi)}{\sin \omega},$$

und also schliesslich

$$\begin{aligned} x &= a + x' \cdot \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin \omega} - y' \cdot \frac{\sin(\omega' - \omega + \varphi)}{\sin \omega} \\ y &= b + x' \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \omega} + y' \cdot \frac{\sin(\omega' + \varphi)}{\sin \omega}. \end{aligned} \qquad \textbf{2)}$$

Dies sind die Ausdrücke für x und y als Funktionen von x' und y'. Will man umgekehrt x' und y' durch x und y ausdrücken, so sind die Koordinaten a' und b' von O in Bezug auf das neue Koordinatensystem einzuführen. Ausserdem sind in 2) zu vertauschen:

x mit x', y mit y', ω mit ω', a mit a', b mit b' und φ mit $-\varphi$.

Man erhält auf diese Weise:

$$\begin{aligned} x' &= a' + x \cdot \frac{\sin(\omega' + \varphi)}{\sin \omega'} + y \cdot \frac{\sin(\omega' - \omega + \varphi)}{\sin \omega'} \\ y' &= b' - x \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \omega'} + y \cdot \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin \omega'}. \end{aligned} \qquad \textbf{2')}$$

Natürlich sind die Gleichungen 2') wesentlich inhaltsgleich mit den Gleichungen 2), sie können nur eine Umformung derselben sein, die man aus 2) durch Berechnung von x' und y' als „Unbekannter" hätte finden müssen. Um daher ihre Richtigkeit zu prüfen, setze man x' und y' aus 2') in 2) zurück, worauf sich „Identität", also $x = x$, $y = y$ herausstellen muss. In der That ergiebt sich diese Identität nach Benutzung der trigonometrischen Formel:

$$\sin(\omega - \varphi) \cdot \sin(\omega' + \varphi) + \sin \varphi \cdot \sin(\omega' - \omega + \varphi) = \sin \omega \cdot \sin \omega'$$

mit leichter Mühe, wenn man noch die folgenden Gleichungen benutzt:

$$\begin{aligned} a + a' \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin \omega} - b' \frac{\sin(\omega' - \omega + \varphi)}{\sin \omega} &= O \\ b + a' \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \omega} + b' \cdot \frac{\sin(\omega' + \varphi)}{\sin \omega} &= O \end{aligned} \qquad \textbf{3)}$$

welche auch sofort aus 2) folgen, indem dort statt des beliebigen Punktes P der Anfangspunkt O genommen wird, worauf x und y beide zu Null, x' und y' zu a' und b' werden. Ganz ebenso erhält man entsprechend durch Einsetzen von O' in 2'):

$$a' + a \cdot \frac{\sin(\omega' + \varphi)}{\sin \omega'} + b \cdot \frac{\sin(\omega' - \omega + \varphi)}{\sin \omega'} = 0$$
$$b' - a \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \omega'} + b \cdot \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin \omega'} = 0, \qquad 3')$$

wobei selbstverständlich die Gleichungen 3') wieder die Umkehrungen von 3) darstellen.

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin \omega} = a_1, \quad -\frac{\sin(\omega' - \omega + \varphi)}{\sin \omega} = a_2,$$
$$\frac{\sin \varphi}{\sin \omega} = b_1, \quad \frac{\sin(\omega' + \varphi)}{\sin \omega} = b_2,$$

so werden die Formeln 2)

$$x = a + a_1 x' + a_2 y',$$
$$y = b + b_1 x' + b_2 y'. \qquad 2'')$$

Das wesentliche Merkmal dieser Transformationen ist der unter allen Umständen gewahrte lineare Charakter, womit gesagt sein soll, dass x und y (ganze) lineare Funktionen von x' und y' werden. Diese Eigenthümlichkeit erweist sich für die tiefere Durchbildung der analytischen Geometrie von der einschneidensten Bedeutung.

Sind im besonderen die beiden Koordinatensysteme rechtwinklig (Figur 33), und nimmt man ferner an, dass der Drehungssinn der ersten Achse (x oder x') nach der zweiten (y oder y') um den rechten Winkel beide Male positiv ist, so muss in 2) gesetzt werden:

$$\omega = \omega' = \frac{\pi}{2} = 90^0$$

und die Transformationsformeln 2) u. 2') vereinfachen sich in

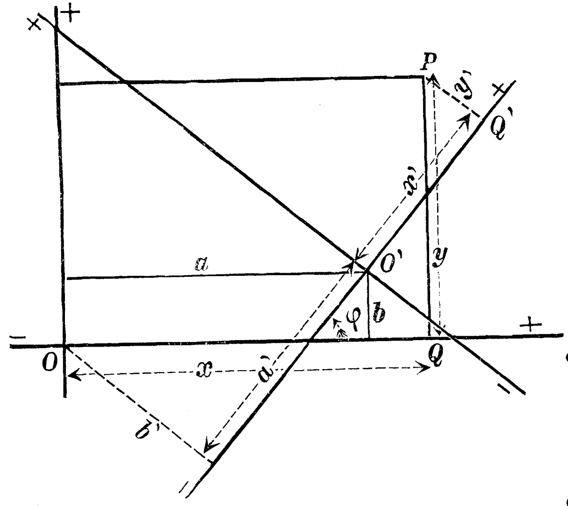


Fig. 33.

$$x = a + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi$$
$$y = b + x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \qquad 4)$$

und umgekehrt:

$$x' = a' + x \cos\varphi + y \sin\varphi$$
$$y' = b' - x \sin\varphi + y \cos\varphi, \qquad 4')$$

während 3) und 3') ergeben

$$a + a' \cos\varphi - b' \sin\varphi = 0$$
$$b + a' \sin\varphi + b' \cos\varphi = 0 \qquad 5)$$
$$a' + a \cos\varphi + b \sin\varphi = 0$$
$$b' - a \sin\varphi + b \cos\varphi = 0. \qquad 5')$$

Diese Transformationsformeln von rechtwinkligen zu rechtwinkligen Koordinaten sind so einfach und werden so häufig gebraucht, dass man gut thut, sie sich fest einzuprägen. Man achte hierzu darauf, dass, abgesehen von a und b (beziehungsweise a' und b'), also von den Verschiebungen des Anfangspunktes nur noch $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ als Coefficienten vorkommen. Ferner steht in jeder Transformationsformel bei gleichstimmigen Koordinaten $\cos\varphi$, bei ungleichstimmigen $\sin\varphi$. So in der ersten Formel für x als Coefficient von x' der $\cos\varphi$, von y' dagegen $\sin\varphi$. Drittens endlich bemerke man, dass $\cos\varphi$ stets mit dem Zeichen $+$, $\sin\varphi$ dagegen in der einen Gleichung mit $+$, in der anderen mit $-$ vorkommt.

Wer diese drei einfachen Regeln kennt, kann nur noch den einen Irrthum begehen, dass er in der ersten der Gleichungen 4) statt $-y' \sin\varphi$ schreibt $+y' \sin\varphi$ und daher in der zweiten statt $+x' \sin\varphi$ schreibt $-x' \sin\varphi$. Will man auch hier einen etwa entstandenen Zweifel mühelos heben, so setze man im besonderen $\varphi = 90^0$, worauf man erhält $x = -y'$, $y = +x'$, was mit den Vorzeichen stimmt, da dann die y'-Achse in die $-x$-Achse und die x'-Achse in die $+y$-Achse gerathen ist. (Im entgegengesetzten Falle würde sich fälschlich ergeben haben $x = y'$, $y = -x$.)

Behält man bei der Transformation die Achsenrichtungen bei, handelt es sich also nur um eine Verschiebung des Anfangspunktes, so ist in 4) und 4') $\varphi = 0$ zu nehmen und man erhält sehr einfach

$$x = x' + a, \quad x' = x - a$$
$$y = y' + b, \quad y' = y - b \qquad 6)$$

als Formeln für die Parallelverschiebung.

Wird aber der Anfangspunkt beibehalten, also nur eine Drehung um den Winkel φ ausgeführt, so ist in 4) und 4') zu setzen $a = b = O = a' = b'$. Man erhält:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \end{aligned} \qquad 7)$$

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\varphi + y \sin\varphi \\ y' &= - x \sin\varphi + y \cos\varphi. \end{aligned} \qquad 7')$$

Bemerkung: Die Formeln 7) oder 7') haben eine besondere Eigenthümlichkeit. Quadrirt man sie und addirt, so folgt:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)^2 + (x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2 \\ &= x'^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + y'^2 (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \\ &\quad + 2x'y' (- \sin\varphi \cos\varphi + \cos\varphi \sin\varphi) \end{aligned}$$

oder:

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2, \qquad 8)$$

d. h. die Summe der Quadrate der Koordinaten ändert sich bei keiner Drehung um den Anfangspunkt. Dass dies richtig ist, folgt auch sofort a posteriori aus der Bemerkung, dass $x^2 + y^2$, also auch $x'^2 + y'^2$ nach 1) das Quadrat des Radiusvector r ist. Man kann daher auch umgekehrt die Gleichung 8) als Bedingungsgleichung für die Transformation ansehen und daraus die Formeln 7) abzuleiten suchen. Wird diese Aufgabe auf eine Summe einer beliebigen Zahl von Quadraten erweitert, so entsteht das berühmte Problem der orthogonalen Transformationen, in welches die analytische Geometrie des Raumes einen tieferen Einblick gewähren wird.

Durch Vermittlung eines dritten Koordinatensystems kann übrigens die allgemeine Transformation 4) in eine Verschiebung und nachfolgende Drehung (oder auch in Drehung mit nachfolgender Verschiebung) aufgelöst werden. Hierzu ziehe man durch O' (Fig. 33) die Parallelen zu den Achsen x, y, und betrachte sie als Achsen x'', y'' dieses dritten Systems.

Der Uebergang von x und y zu x'' und y'' ist eine Verschiebung um a und b, und geschieht nach 6) durch die Formel

$$\begin{aligned} x &= x'' + a \\ y &= y'' + b \end{aligned} \qquad 9)$$

Der Uebergang von x'' und y'' zu x' und y' ist eine reine Drehung um den Winkel φ und erfolgt nach 7)

$$\begin{aligned} x'' &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \\ y'' &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \end{aligned} \qquad 10)$$

Eliminirt man x'' und y'', was sofort durch Einsetzen von 10) in 9) erreicht wird, so entstehen wieder die Formeln 4).

Bemerkung: Es kommt in mancher Hinsicht sehr darauf an, wie viele „willkürliche Grössen" bei irgend einer Aufgabe zur Verfügung stehen. Man merke sich daher, dass bei rechtwinkligen Transformationen drei solche, nämlich a, b und φ vorhanden sind. (Bei schiefwinkligen waren es fünf: a, b, φ, ω, ω').

Wenn man darnach sucht, wird man ausser den hier abgehandelten Koordinatensystemen noch viele andere auffinden können. Werden z. B. ein fester Punkt und eine feste Gerade zu Grunde gelegt, so wird die Lage eines beliebigen Punktes durch seinen Abstand r von dem festen Punkt und seinen Abstand Δ von der festen Geraden bestimmt. Oder man kann auch zwei feste Punkte nehmen und die Abstände r_1 und r_2 eines beliebigen Punktes P von diesem Punkte als Koordinaten von P einführen u. s. w.

Eine kleine Ueberlegung zeigt aber, dass solche Koordinatenbestimmungen im allgemeinen sehr unvortheilhaft werden. Ganz abgesehen davon, dass zu gegebenen Werthen von r und Δ, beziehungsweise r_1 und r_2 mehrere Punkte gehören — diesem Uebelstande könnte abgeholfen werden —, zeigt sich hier, dass nicht umgekehrt zu jeder Angabe von r und Δ oder r_1 und r_2 ein Punkt P gehört. Wenn z. B. $r = 0$ und $\Delta = 0$ sein soll, so fällt der Punkt aus, er existirt nicht (oder besser er wird imaginär). Ferner aber, wenn r_1 und r_2 sehr gross werden, so wird der Winkel zwischen r_1 und r_2 sehr klein und wenn durch Zeichnen der beiden Kreise mit r_1 und r_2 als Radien um die festen Punkte als Mittelpunkte der Punkte P gefunden werden sollte, so wäre eine angemessene Genauigkeit überhaupt nicht zu erzielen.

Genug, derartige Koordinaten können nur in ganz besonderen Problemen von Vortheil sein, zu allgemeinen Untersuchungen eignen sich nur die rechtwinkligen und schiefwinkligen Koordinatensysteme; rechtwinklige aber der Einfachheit wegen ganz ins besondere. So hat sich denn das rechtwinklige Koordinatensystem, seitdem es Cartesius auf-

gestellt, als die einfachste, als die wahre Grundlage der analytischen Geometrie und all ihrer zahllosen Anwendungen erprobt.

Aufgaben.

1. Gegeben ein Quadrat *ABCD*. Zuerst war *AB* und *AD* als x- und y-Achse eines Koordinatensystems genommen. Nachher sollen die beiden Diagonalen als Achsen eines zweiten Koordinatensystems dienen und zwar sollen *AC* die Positivrichtung der x'-Achse und *BD* die Positivrichtung der y'-Achse werden. Die Transformationsformeln sind aufzustellen. (Die Seite des Quadrats sei $= a$).

2. Gegeben ein gleichseitiges Dreieck *ABC* mit der Seite a. Es werden erst *AB* als x-, *AC* als y-Achse eines ersten, dann *BC* als x'-, *BA* als y'-Achse eines zweiten und endlich *CA* als x''-, *CB* als y''-Achse eines dritten Koordinatensystems genommen. Die Transformationsformelm sind abzuleiten.

3. Innerhalb eines Kreises mit dem Radius r rollt ein anderer Kreis mit dem Radius $\frac{r}{2}$. Durch den Mittelpunkt des festen Kreises sind zwei senkrechte Radien als x- und y-Achse eines Systems genommen und ebenso durch den Mittelpunkt des rollenden Kreises zwei senkrechte Radien als x'- und y'-Achse eines andern Koordinatensystems, das mit diesem Kreis mitrollt. Zu Anfang soll der Mittelpunkt des rollenden Kreises auf der $+ x$-Achse liegen und $+ x$- und $+ x'$-Achse in einerlei Richtung fallen. Wie lauten die Transformationsformeln, wenn der abgerollte Centriwinkel mit φ bezeichnet wird?

---

§ 5.
Grundaufgaben und Grundformeln der analytischen Geometrie.

Es giebt eine kleine Zahl einfacher Aufgaben der analytischen Geometrie, die als Grundaufgaben zu bezeichnen sind, weil sie bei allen Anwendungen wiederkehren und deren Lösung daher Jedermann, der in diese Wissenschaft eindringen will — wie tief ist ganz gleichgiltig — geläufig sein muss. Die wichtigsten sind folgende:

Aufgabe I. Gegeben zwei Punkte P_1 $(x_1\, y_1)$, P_2 $(x_2\, y_2)$. (Fig. 34). Gesucht ihr Abstand $P_1\, P_2 = r$ und die Richtung von P_1 nach P_2.

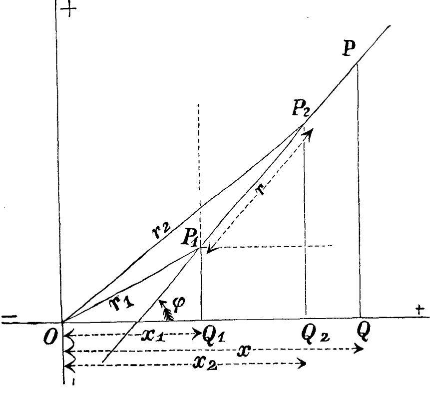


Fig. 34.

Lösung: Man verschiebe das Koordinatensystem parallel, so dass P_1 der neue Anfangspunkt wird. Dann werden die Koordinaten von P_2 nachher $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$ (nach 6) § 4)[1]) und die Aufgabe ist auf diejenige des § 4 (Seite 52) zurückgeführt.

Daher:

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \qquad \mathbf{1)}$$

$$\sin\varphi = \frac{y_2 - y_1}{r}, \cos\varphi = \frac{x_2 - x_1}{r}, \operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \operatorname{cotg}\varphi = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1},$$

also im besonderen

$$m = \operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{Differenz der Ordinaten}}{\text{Differenz der Abscissen}}. \qquad \mathbf{2)}$$

Anmerkung: Setzt man $m = \pm i$, nimmt also an, dass P_1 und P_2 auf einem Nullstrahl liegen, so wird

$$P_1 P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + m^2}$$
$$= (x_2 - x_1) \cdot 0 = 0,$$

d. h. der Abstand verschwindet, ohne dass die beiden Punkte zusammenfallen. Daher auch der Name Nullstrahlen oder Nulllinien (§ 3, Seite 44).

Aufgabe II. Gegeben zwei Punkte P_1 (x_1, y_1) und P_2 (x_2, y_2). Gesucht die Koordinaten eines beliebigen Punktes $P\,(x, y)$ auf der Verbindungslinie.

Lösung: Da es auf einer Geraden unendlich viele Punkte giebt, so hat die gestellte Aufgabe auch unendlich viele Lösungen. Es muss die Lage von P erst noch bezeichnet werden, und hierzu kann man sich des Verhältnisses $\lambda = \frac{PP_1}{PP_2}$

[1]) $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$ werden auch die relativen Koordinaten von P_2 in Bezug auf P_1 genannt.

bedienen, wie es in § 1 besprochen. Da dieses Verhältniss bei allen Paralleltransformationen dasselbe bleibt, so ist sofort

$$\lambda = \frac{PP_1}{PP_2} = \frac{QQ_1}{QQ_2} = \frac{x_1 - x}{x_2 - x}.$$

In gleicher Weise würde durch Projiciren auf die y-Achse entstehen:

$$\lambda = \frac{y_1 - y}{y_2 - y}.$$

Daher umgekehrt:

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}$$
$$y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}. \qquad 3)$$

Nimmt man an, dass λ hier alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annimmt, so durchläuft P nach § 1 die ganze Linie P_1P_2 in ihrer unendlichen Ausdehnung. Setzt man z. B. $\lambda = -1$, so wird

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad 3a)$$

d. h. die Koordinaten der Mitte zweier Punkte sind die arithmetischen Mittel der Koordinaten dieser Punkte.

Die Formeln 3) können umgestaltet werden, z. B. so:

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} = \frac{x_1 - \lambda x_1 - \lambda x_2 + \lambda x_1}{1 - \lambda} = x_1 - \frac{\lambda}{1 - \lambda} \cdot (x_2 - x_1)$$
$$= x_1 + \mu \cdot (x_2 - x_1),$$

wo μ für $-\frac{\lambda}{1-\lambda}$ gesetzt ist. Entsprechendes gilt für y. Die Gleichungen 3) können daher auch durch die folgenden ersetzt werden:

$$x = x_1 + \mu \cdot (x_2 - x_1)$$
$$y = y_1 + \mu \cdot (y_2 - y_1). \qquad 4)$$

Nach 1) ist $x_2 - x_1 = r \cdot \cos \varphi$, $y_2 - y_1 = r \cdot \sin \varphi$. Die Formeln 4) ergeben daher weiter, wenn statt $\mu \cdot r$ ein neuer Buchstabe ϱ gesetzt wird:

$$x = x_1 + \varrho \cdot \cos \varphi.$$
$$y = y_1 + \varrho \cdot \sin \varphi. \qquad 5)$$

ϱ ist in 5) der Abstand PP_1 und zwar positiv oder negativ, je nachdem P von P_1 aus in der Richtung φ oder in der entgegengesetzten Richtung $(180^0 + \varphi)$ liegt.

Aufgabe III. Gegeben zwei Punkte P_1 (x_1, y_1) und P_2 (x_2, y_2). Gesucht der Winkel $P_1OP_2 = \alpha$.

Lösung: Man bestimme die Richtungen φ_1 und φ_2 nach Formel 1) § 4 und setze $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$.

Zur trigonometrischen Lösung kann man den sinus, den cosinus oder den tangens nehmen.

$$\sin\alpha = \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \cdot \sin\varphi_1$$
$$= \frac{x_1}{r_1} \cdot \frac{y_2}{r_2} - \frac{y_1}{r_1} \cdot \frac{x_2}{r_2} = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{r_1r_2},$$
$$\cos\alpha = \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{r_1 \cdot r_2}, \qquad \textbf{6)}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_2 \cdot \operatorname{tg}\varphi_1} = \frac{\frac{y_2}{x_2} - \frac{y_1}{x_1}}{1 + \frac{y_2}{x_2} \cdot \frac{y_1}{x_1}}$$
$$= \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{x_1x_2 + y_1y_2}.$$

Die letzte Formel wäre auch aus den beiden ersten durch Division hervorgegangen. Liegt, wie in Fig. 34, der Anfangspunkt O links von der Richtung P_1P_2, so ist α sofort der Winkel bei O im Dreieck OP_1P_2, im anderen Fall ist letzterer Winkel $= -\alpha$, beziehungsweise $= 360^0 - \alpha$. Die übrigen Winkel des Dreiecks werden ebenso bestimmt, nur muss zunächst der Anfangspunkt des Koordinatensystems in die entsprechende Ecke verlegt werden.

Aufgabe IV. Gegeben drei Punkte P_1 (x_1y_1), $P_2(x_2y_2)$, $P_3(x_3y_3)$. (Fig. 35.) Gesucht wird ein Punkt $P(x,y)$ innerhalb des Dreieckes $P_1P_2P_3$, wenn das Verhältniss der Dreiecke gegeben ist, in welche dieses Dreieck durch die Strecken PP_1, PP_2 und PP_3 getheilt wird.

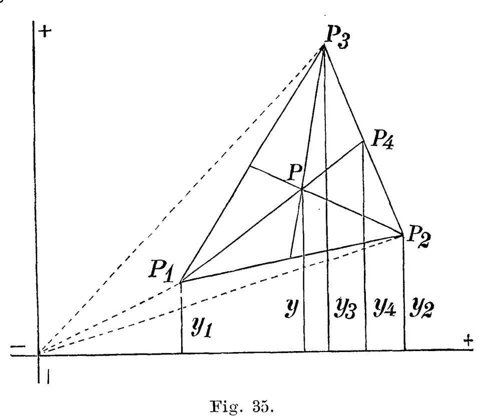


Fig. 35.

Lösung: Es möge gegeben sein als Bedingung:

$$\triangle P_2P_3P : \triangle P_3P_1P : \triangle P_1P_2P = n_1 : n_2 : n_3.$$

Man nehme den Schnittpunkt $P_4(x_4, y_4)$ von PP_1 und P_2P_3 zu Hilfe. Die beiden Dreiecke P_3P_1P und P_1P_2P haben die Seite P_1P gemeinsam. Ihre Inhalte verhalten sich also wie die von P_3 und P_2 ausgehenden Höhen. Diese verhalten sich aber wie P_3P_4 zu P_4P_2. Also:

$$P_3P_4 : P_4P_2 = \triangle P_3P_1P : \triangle P_1P_2P = n_2 : n_3.$$

Daher

$$\lambda = (P_2P_3P_4) = \frac{P_2P_4}{P_3P_4} = -\frac{n_3}{n_2},$$

und nach Formel 3)

$$x_4 = \frac{x_2 - \lambda x_3}{1 - \lambda} = \frac{x_2 + \frac{n_3}{n_2} x_3}{1 + \frac{n_3}{n_2}} = \frac{n_2 x_2 + n_3 x_3}{n_2 + n_3},$$

ebenso

$$y_4 = \frac{n_2 y_2 + n_3 y_3}{n_2 + n_3}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} P_1P : PP_4 &= \triangle P_3P_1P : \triangle P_3PP_4 = \triangle P_1P_2P : \triangle PP_2P_4 \\ &= \triangle P_3P_1P + \triangle P_1P_2P : \triangle P_3PP_4 + \triangle PP_2P_4 \\ &= \triangle P_3P_1P + \triangle P_1P_2P : \triangle P_2P_3P \\ &= n_2 + n_3 : n_1, \end{aligned}$$

also:

$$\lambda' = (P_1P_4P) = \frac{PP_1}{PP_4} = -\frac{n_2 + n_3}{n_1},$$

und somit wieder nach 3)

$$x = \frac{x_1 - \lambda' x_4}{1 - \lambda'}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda' y_4}{1 - \lambda'}.$$

Daher endlich nach Einsetzen der angegebenen Werthe von x_4, y_4 und λ'

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3}{n_1 + n_2 + n_3} \\ y &= \frac{n_1 y_1 + n_2 y_2 + n_3 y_3}{n_1 + n_2 + n_3} \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

Ist z. B. P der Schwerpunkt, so ist $n_1 : n_2 : n_3 = 1 : 1 : 1$ und es wird:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$$

d. h. die Koordinaten des Schwerpunktes eines Dreiecks sind das arithmetische Mittel der Koordinaten der Ecken.

Werden die drei Zahlen n_1, n_2, n_3 nicht alle drei mit demselben Vorzeichen angenommen, so liegt P nicht mehr innerhalb des Dreiecks. Aber auch dann noch stellt $n_1 : n_2 : n_3$ das Verhältniss der Dreiecke vor, nur eben algebraisch, dem Vorzeichen entsprechend.

Aufgabe V. Gegeben zwei Punkte $P_1(x_1 y_1)$, $P_2(x_2 y_2)$ (Fig. 34). Gesucht der Flächeninhalt des Dreiecks OP_1P_2.

Lösung: In der Regel wird bei Lösungsversuchen zuerst an die Formel $\triangle = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$ gedacht, wo a, b, c die drei Seiten und s der halbe Umfang ist. Aber da hier nach 1) § 4 und 1) § 5 die Seiten durch Wurzelausdrücke bestimmt werden, so giebt diese Formel augenscheinlich sehr umständliche Rechnungen, ehe sie den Flächeninhalt in einfachster Gestalt darstellt.

Viel schneller und auch dem Wesen der analytischen Geometrie entsprechender gelangt man zum Ziele durch Zurückführung des Dreiecks OP_1P_2 auf solche Flächen, die auf der x-Achse selbst stehen. Dies ist offenbar sofort möglich und giebt:

$$\triangle\, OP_1P_2 = \triangle\, OQ_2P_2 - \triangle\, OQ_1P_1 - \text{Trapez } P_1Q_1Q_2P_2$$

also, wenn diese drei Flächen nach den Elementen der Flächenrechnung bestimmt werden:

$$\triangle\, OP_1P_2 = \frac{x_2y_2 - x_1y_1 - (x_2 - x_1)(y_2 + y_1)}{2}$$

$$= \frac{x_2y_2 - x_1y_1 - x_2y_2 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_1}{2}$$

und endlich

$$\triangle\, OP_1P_2 = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{2}. \qquad 8)$$

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass in dieser Formel als Einheit der Fläche das Quadrat der Längeneinheit zu setzen ist, also z. B. der Quadratmeter, wenn die Längeneinheit der Meter.

Wenn in Fig. 34) die Ordinate y_1, um einen solchen Betrag vermehrt würde, dass P_1 auf die andere Seite von OP_2 zu liegen käme, so müsste der vorige Ansatz augenscheinlich so umgeändert werden:

$$\triangle\, OP_2P_1 = \triangle\, OQ_1P_1 + \text{Trapez } P_1Q_1Q_2P_2 - \triangle\, OP_2Q_2,$$

während sonst die Rechnung ihren Gang behielte. Da nun gegen den vorigen Ansatz alle Flächen ihre Zeichen gewechselt haben, so würde sich diesmal ergeben:

$$\triangle\ OP_2P_1 = -\frac{x_1y_2 - y_1x_2}{2} = \frac{x_2y_1 - y_2x_1}{2}.$$

Wie nun auch die Punkte P_1 und P_2 gelegen sein mögen, stets wird der Inhalt entweder $+\frac{x_1y_2 - y_1x_2}{2}$ oder $= -\frac{x_1y_2 - y_1x_2}{2}$ gefunden werden. Man könnte daher sagen, dass der Flächeninhalt gleich dem absoluten Werthe von $\frac{x_1y_2 - y_1x_2}{2}$ sei und das Vorzeichen als nebensächlich fortwerfen. Das wäre aber ein Verstoss gegen den Charakter der analytischen Geometrie; denn ein Vorzeichen, wo immer es auftritt, hat seine Bedeutung, die aufzusuchen ist.

Dies gelingt hier folgendermassen. In Aufgabe III) ist die Bemerkung gemacht worden, dass der dort mit α bezeichnete Winkel der Dreieckswinkel bei O im Dreieck OP_1P_2 ist, wenn, wie in Fig. 34, O links von der Richtung P_1P_2 liegt. In diesem Falle giebt die bekannte Formel für ein Dreieck, ausgedrückt aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel nach 6)

$$\triangle\ OP_1P_2 = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot \sin\alpha}{2} = +\frac{x_1y_2 - y_1x_2}{2}$$

Liegt O indessen rechts, so ist der betreffende Dreieckswinkel nicht $= \alpha$, sondern $= -\alpha$ beziehungsweise $= 360^0 - \alpha$ und man erhält

$$\triangle\ OP_2P_1 = -\frac{r_1 \cdot r_2 \cdot \sin\alpha}{2} = -\frac{x_1y_2 - y_1x_2}{2}.$$

Noch einfacher gestaltet sich folgendes Merkmal, das allerdings auf das eben angegebene zurückführt. Man stelle sich das $\triangle\ OP_1P_2$ als ein Feld vor, dessen Grenze oder Umfang im Sinn von O nach P_1, von P_1 nach P_2, von P_2 nach O zurück durchlaufen werden soll. In Fig. 34) liegt dann das Feld stets zur linken, der Umlauf ist ein Linksumlauf, wie in allen Fällen, wenn $x_1y_2 - y_1x_2$ positiv ist, während bei negativen Vorzeichen ein Rechtsumlauf vorhanden ist. Daher:

Die Formel 8) giebt den Inhalt des Dreiecks

OP_1P_2 positiv oder negativ, je nachdem der Umlauf $O - P_1 - P_2 - O$ Linksumlauf oder Rechtsumlauf.[1])

Man thut daher gut, schon bei der Bezeichnung eines Dreiecks oder einer Fläche überhaupt den Linksumlauf zu nehmen, wenn der Inhalt positiv herauskommen soll, den Rechtsumlauf, wenn negativ. So ist z. B.:

$$\triangle\, OP_1P_2 = \triangle\, P_1P_2O = \triangle\, P_2OP_1 = -\triangle\, OP_2P_1 = -\triangle\, P_1OP_2 = -\triangle\, P_2P_1O.$$

Anmerkung. Der Ausdruck $x_1y_2 - y_1x_2$ wird auch „Determinante“ und zwar Determinante zweiten Grades genannt und als solcher mit

$$x_1y_2 - y_1x_2 = \begin{vmatrix} x_1, & y_1 \\ x_2, & y_2 \end{vmatrix}$$

bezeichnet. Diese wichtigen algebraischen Formen werden in § 18 erörtert werden.

Aufgabe VI. Gegeben drei Punkte $P_1(x_1y_1)$, $P_2(x_2y_2)$ $P_3(x_3y_3)$. Gesucht der Inhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$. (Fig. 35.)

Erste Lösung: Man verbinde alle Ecken mit O, dann ist:

$$\begin{aligned}\triangle\, P_1P_2P_3 &= \triangle\, OP_2P_3 - \triangle\, OP_1P_3 - \triangle\, OP_2P_1 \\ &= \triangle\, OP_1P_2 + \triangle\, OP_2P_3 + \triangle\, OP_3P_1 \\ &= \frac{x_1y_2 - y_1x_2 + x_2y_3 - y_2x_3 + x_3y_1 - y_3x_1}{2}.^{2)} \qquad 9)\end{aligned}$$

Zweite Lösung: Man verlege den Anfangspunkt in eine Ecke, z. B. in P_1. Dann werden die Koordinaten von $P_2 : x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$ und von $P_3 : x_3 - x_1$ und $y_3 - y_1$. Die Formel 8) giebt dann:

$$\triangle\, P_1P_2P_3 = \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}{2}. \qquad 9')$$

Wird hier im Zähler ausmultiplicirt und dann $+ x_1y_1$ gegen $- x_1y_1$ gehoben, so erhält man wieder 9).

Aufgabe VII. Gegeben ein Polygon $P_1P_2P_3 \ldots P_n$ durch die Koordinaten der Ecken. Gesucht der Inhalt.

Erste Lösung: Man zerlege das Polygon durch Diagonalen in Dreiecke (dies ist auch bei Polygonen mit einspringenden Ecken stets möglich), berechne jedes Dreieck nach Formel 9) und addire.

---

[1]) Wenn aber die $+x$-Achse nach der $+y$-Achse „rechts“ herum um 90^0 gedreht werden muss, so ist gerade das Gegentheil richtig.

[2]) Man beachte den Cyclus (1 2 3).

Zweite (bessere) Lösung: Man verbinde sämmtliche Ecken mit O, so ist der Inhalt gleich der algebraischen Summe aller Dreiecke, welche O zur Spitze und je eine Seite als Grundlinie haben. Liegt O z. B. innerhalb des Polygons und sind seine Ecken alle convex, so müssen diese Dreiecke augenscheinlich ohne Weiteres addirt werden. Aber auch in jedem anderen Falle wird durch cyclische Anordnung das Vorzeichen jedes Dreiecks durch die Formel selbst schon richtig bestimmt; daher ist stets:

$$\text{Polygon } P_1P_2P_3\ldots P_n = \triangle OP_1P_2 + \triangle OP_2P_3 + \ldots + \triangle OP_{n-1}P_n + \triangle OP_nP_1$$

$$= \frac{x_1y_2 - y_1x_2 + x_2y_3 - y_2x_3 + \ldots + x_{n-1}y_n - y_{n-1}x_n + x_ny_1 - y_nx_1}{2}.$$

Für die Anwendung zieht man zweckmässig Glieder mit demselben y (oder demselben x) zusammen und schreibt die Formel so:

$$\text{Polygon} = \frac{y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_4)\ldots + y_n(x_{n-1} - x_1)}{2}.$$

Aufgaben.

1. Gegeben $P_1(+1, +1)$, $P_2(+2, +4)$, $P_3(+6, +2)$. Zu berechnen Seiten und Winkel des Dreiecks $P_1P_2P_3$, Koordinaten des Schwerpunktes, des Höhendurchschnittspunktes und des Mittelpunktes des umschriebenen Kreises.

2. Von einem Parallelogramm $P_1P_2P_3P_4$ sind gegeben $P_1(x_1y_1)$ $P_2(x_2y_2)$ $P_3(x_3y_3)$. Gesucht $P_4(x_4y_4)$.

3. Das Dreieck $P_1(x_1y_1)$, $P_2(x_2y_2)$, $P_3(x_3y_3)$ wird um die Seite P_1P_2 herumgeklappt. Zu berechnen die Koordinaten $x'_3y'_3$ des Punktes P'_3, auf den nun P_3 zu liegen kommt.

4. Von einem regelmässigen Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ (Umlauf links herum) sind gegeben $P_1(+1, -2)$, $P_2(0, +1)$. Gesucht die Koordinaten der vier anderen Ecken.

Zweiter Abschnitt.

§ 6—11.

---

§ 6.

Begriff der Gleichung einer Kurve. Erläuterung an Beispielen. Seine hohe Bedeutung.

Die „Gleichung einer Kurve“ ist der eigenthümlichste Begriff der analytischen Geometrie, der auch in den Anwendungen tausendfache Frucht getragen hat. Unter Kurve wird hier irgend eine Linie schlechthin verstanden, sei sie eine Gerade, eine Ellipse, ein Kreis, eine Spirale u. s. w. Es sei eine solche Kurve (Fig. 36) gegeben, die stillschweigend als continuirlich oder stetig vorausgesetzt wird, so dass es zwischen zwei noch so nahen Punkten auf ihr immer noch andere Punkte giebt und das Fortschreiten auf der Kurve in ununterbrochenem Zuge geschehen kann, die Kurve als eine kontinuirliche Folge von Punkten erscheint. Greift man irgend einen Punkt P heraus, nennt seine Koordinaten x und y, so ist klar, dass durch den Verlauf der Kurve eine Abhängigkeit zwischen x und y gegeben ist. Wenn sich P, der sogenannte „laufende Punkt“, auf der Kurve bewegt, so ändern sich x und y, aber doch nicht ganz willkürlich, da durch das x zugleich das y mit bestimmt ist (und umgekehrt). Denn wird etwa $x = OQ$ angenommen, so ziehe man durch Q die Parallele zur y-Achse und suche den Schnittpunkt P mit der Kurve auf. Dieser Punkt hat das angenommene x, während das y durch diese einfache Konstruktion gefunden wurde.

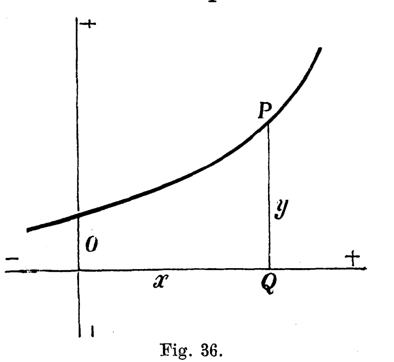


Fig. 36.

Darnach ist y von x abhängig oder y eine Funktion von x. Diese Funktion ist hier geometrisch bestimmt eben durch den Verlauf der Kurve selbst; es leuchtet aber ein, dass jede Abhängigkeit zwischen Grössen auch analytisch durch die Formel ausdrückbar sein muss. Diese Formel, diese Gleichung, die bekanntlich allgemein durch:

$$y = f(x). \quad (f(x) \text{ soll heissen Funktion von } x) \qquad \textbf{1)}$$

dargestellt wird, ist die Gleichung der Kurve.

Einige einfache Beispiele werden dies erläutern:

1. Die Kurve sei diejenige Gerade, welche durch den Anfangspunkt geht und den Richtungscoefficienten $m = +1$ besitzt. Dann ist augenscheinlich für jeden Punkt dieser Linie:

$$y = x,$$

und dies ist ihre Gleichung.

2. Die Kurve sei ein Kreis um den Anfangspunkt mit a als Radius und $P(x, y)$ ein beliebiger Punkt auf demselben. Dann ist nach Formel 1) § 4:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

oder

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

womit die gesuchte Gleichung gefunden ist.

Fig. 37.

Bemerkungen.

1. Im zweiten Beispiel ist y eine zweideutige Funktion von x, da zu jedem x zwei (entgegengesetzt gleiche) Werthe von y gehören. Und in der That schneidet die Parallele durch Q zur y-Achse den Kreis in zwei zur x-Achse symmetrischen Punkten P und P'.

2. Der Ansatz $[x] > a$[1]) giebt einen negativen Radikanden, also imaginäre Werthe für y. Daraus ist in Uebereinstimmung mit der Anschauung (Fig. 37) zu schliessen, dass jenseit von $x = +a$ oder von $x = -a$ nirgend ein Punkt des Kreises gefunden werden kann.

[1]) Der absolute Betrag einer algebraischen Grösse wird in der Regel mit $[x]$ bezeichnet.

3. Wir haben hier zwei Gleichungen gehabt, nämlich

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

und

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Beide Gleichungen haben denselben analytischen Inhalt, sind aber der Form nach verschieden. Die zweite Form entsteht aus der ersten durch Berechnung von y, die zweite aber aus der ersten, indem man die Wurzel fortschafft — was zu $y^2 = a^2 - x^2$ führt — und dann alle Glieder auf die linke Seite bringt, so dass rechts nur noch Null steht.

Man bezeichnet demnach sowohl die Formel $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$, als auch die Formel: $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ als Gleichung des Kreises; unterscheidet aber die erste Form als explicite von der zweiten als der impliciten. Explicite heisst die erste Form, weil in ihr y unmittelbar durch x dargestellt ist, implicite dagegen die zweite Form, weil sie erst mittelbar y als Funktion von x giebt, da erst y zu berechnen ist, um die explicite Form zu erhalten. [Es ist zwar nicht nothwendig, aber doch sehr zweckmässig, bei Anwendung der zweiten Form alle Glieder auf die eine (die linke) Seite zu bringen und die Gleichung in die Gestalt

$$F(x, y) = 0 \qquad \textbf{2)}$$

zu bringen, weil dann eben nur die linke Seite zu behandeln ist, da rechts nichts mehr steht, ausser der Null].

Jede der beiden Formen hat ihre Vorzüge und Nachtheile. Bei der expliciten Form ist y direkt als Funktion von x gegeben, bei der impliciten nicht. Dies wird aber dadurch ausgeglichen, dass bei der letzten Form Wurzeln vermieden werden können, wie das Beispiel zeigt, und ebenso etwa auftretende Nenner, die man durch Ausmultipliciren fortschaffen kann.

Bei näherer Prüfung wird man sogar meist der impliciten Form den Vorzug geben. Erstens ist sie ein klein wenig allgemeiner. Wird z. B. eine Parallele zur y-Achse im Abstande a vom Anfangspunkt gegeben, so ist ausnahmsweise y überhaupt keine Funktion von x; es giebt für einen beliebigen Werth von x gar kein y (ausser $y = \pm \infty$), während y für $x = a$ jeden Werth hat. Die Form $y = f(x)$ versagt

also hier, während die explicite Form der Gleichung lautet:

$$x - a = 0$$

welches augenscheinlich ein sehr specieller Fall der Gleichung $F(x, y) = 0$ ist, der Fall nämlich, dass y gar nicht vorkommt.

Dann aber ist die explicite Form in vielen Fällen nur sehr schwer und auf mühsamen Umwegen zu erhalten. Wenn z. B. die Gleichung vorliegt:

$$y^5 + x^2 y - 3x^5 = 0$$

also eine Gleichung von eigentlich einfacher Form, so kann auf keine Weise y algebraisch als explicite Funktion von x dargestellt werden, weil, wie der grosse Mathematiker Abel gezeigt hat, Gleichungen 5ten Grades im allgemeinen nicht algebraisch lösbar sind. Die explicite Form würde hier nur durch umfangreiche Reihenentwickelungen gewonnen werden können.

Hierzu kommt, dass die implicite Form für allgemeinere Untersuchungen in sehr vielen Beziehungen bequemer und auch angemessener ist, so dass sie trotz des scheinbaren Vorsprungs der expliciten Form sich doch in der Regel als bei weitem vortheilhafter erweist.

Wie jede Kurve eine Gleichung hat und haben muss, so kann auch umgekehrt jede Gleichung zwischen x und y als Kurve gedeutet werden, indem man sich die Gesammtheit der Punkte $P(x, y)$ vorstellt, deren Koordinaten diese Gleichung erfüllen. Liegt z. B. die Gleichung vor:

$$y^2 - x^2 - a^2 = 0,$$

so ersieht man sofort, dass stets $[y] > [x]$ und dass jedem Werth von x zwei entgegengesetzt gleiche reelle Werthe von y entsprechen, die in expliciter Darstellung sind:

$$y = \pm \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Mithin ist die x-Achse eine Symmetrie-Achse der Kurve. Aber auch die y-Achse ist eine solche, da die Gleichung unverändert bleibt, wenn x sein Vorzeichen ändert. Wird noch hinzugefügt, dass $[y]$ mit $[x]$ zugleich wächst, dass der Minimalwerth von $[y] = a$ ist (entsprechend $x = 0$), dass daher die Kurve eigentlich aus zwei getrennten Kurven, einer über, einer unter der x-Achse besteht, so ist wohl erschöpft, was auch der Uneingeweihte auf den „ersten Blick“ sieht. Will

man weiter gehen, so setze man für x eine Reihe von Werthen ein, berechne die zugehörigen Werthe von y, stelle die so gefundenen zusammengehörenden Werthepaare als Koordinaten von Punkten zusammen und trage diese in die Zeichnung ein, z. B. ($a = 1$ gesetzt):

$[x]$	$[y]$
0	1
1	$\sqrt{2} = 1{,}41$
2	$\sqrt{5} = 2{,}24$
3	$\sqrt{10} = 3{,}16$
4	$\sqrt{17} = 4{,}12$

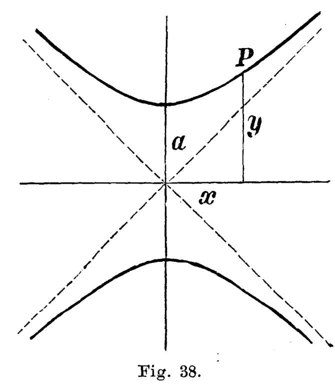


Fig. 38.

So wird man bald eine deutliche Vorstellung von dem äusserlichen Verlauf der Kurve gewinnen (Fig. 38). Ihre innere geometrische Qualität freilich, die sich in tiefer liegenden geometrischen Eigenschaften offenbart, kann durch solche graphische Konstruktionen, so nützlich sie auch sind, nicht erkannt werden, dazu gehören Betrachtungen ganz anderer Art. Selbstverständlich ist nur, dass eben durch die Gleichung die ganze Kurve mit allen ihren Eigenschaften, auch den versteckten und entferntesten, bestimmt ist und dass es Mittel und Wege geben muss, diese Eigenschaften aus der Gleichung heraus zu entdecken.

Es kann aber auch der Fall eintreten, dass zu einer Gleichung überhaupt keine Kurve existirt oder vielmehr, dass die Kurve, wie man sagt, ganz und gar imaginär wird. Wenn z. B. die Gleichung gegeben ist:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

so sieht man auf der Stelle, dass kein reelles Werthpaar (x, y) diese Gleichung erfüllen kann, da x^2 und y^2 stets positiv sind, gleichgiltig ob x und y positiv oder negativ seien.

Nimmt man ferner die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 0,$$

welche ersichtlich bei Beschränkung auf reelle Werthe nur für $x = 0$, $y = 0$ erfüllt werden kann, so besteht die ganze Kurve aus dem Anfangspunkt.

Nach diesen Erläuterungen wird man nun wohl die folgende Definition der Gleichung einer Kurve als richtig anerkennen:

Unter Gleichung einer Kurve versteht man eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen[1]) (x und y), welche erfüllt wird, wenn in dieselbe für x und y die Koordinaten irgend eines Punktes der Kurve eingesetzt werden, welche aber nicht erfüllt wird, wenn für x und y die Koordinaten eines solchen Punktes genommen werden, der nicht auf der Kurve liegt.

Dieses Einsetzen ist eben das Kriterum, ob ein gegebener Punkt auf einer Kurve liegt oder nicht. Die Behauptung z. B., dass der Punkt $P(+2, -3)$ auf der Kurve mit der Gleichung:

$$x^2 - 3y^2 + 4x + 15 = 0$$

liegt, wird sofort durch Einsetzen als richtig geprüft, da $(+2)^2 - 3(-3)^2 + 4(+2) + 15 = 0$, während man ohne weiteres sieht, dass der Anfangspunkt nicht auf der Kurve liegen kann, da durch Einsetzen von $x = 0$ und $y = 0$ links $+15$ herauskommt, während 0 herauskommen soll.

Wenn eine Gleichung für alle Punkte einer Kurve erfüllt wird, ist sie dann immer die Gleichung dieser Kurve? Diese Frage erscheint auf den ersten Blick sonderbar genug, da man wohl geneigt wäre, sie sofort mit ja zu beantworten. Indessen, wäre es nicht möglich, dass die Gleichung auch noch für solche Punkte erfüllt wird, die nicht auf dieser Kurve liegen? Dann würde sie nach der Definition doch nicht die Gleichung derselben sein?

Ein einfaches Beispiel wird die Berechtigung dieses Einwurfes zeigen. Gesetzt, es liege die Gleichung vor

$$y^2 - x^2 = 0$$

Dieselbe wird erfüllt für jeden Punkt der durch O gehenden geraden Linie, deren Richtungswinkel $= +45^0$ ist, denn für jeden solchen Punkt ist $y = x$, also auch $y^2 = x^2$. Nichtsdestoweniger ist die angegebene Gleichung nicht die Gleichung dieser Geraden, denn sie wird auch erfüllt, wenn

[1]) Es wäre nicht richtig, hier „Unbekannten“ zu sagen, denn x und y sind hier weder bekannt, noch unbekannt, sondern von Punkt zu Punkt „veränderliche“ Grössen.

$y = -x$, d. h. wenn der Punkt auf der durch 0 gehenden Geraden liegt, die den Richtungswinkel -45^0 besitzt. Die Gleichung stellt also beide Linien zugleich dar!

In der That kann die linke Seite als Produkt, nämlich $= (y - x)(y + x)$ geschrieben werden. Und da ein Produkt nur $= 0$ sein kann, wenn ein Faktor $= 0$ ist, so zerfällt die Gleichung in die beiden Gleichungen $y - x = 0$ und $y + x = 0$, von denen jede eine der beiden Geraden ergiebt.

Diese Darstellung zweier ganz verschiedener Kurven durch eine Gleichung ist offenbar stets möglich. Denn seien $F_1(xy) = 0$ und $F_2(x, y) = 0$ die Gleichungen beider Kurven, so bilde man die „Produktengleichung":

$$F_1(x_1y) \cdot F_2(xy) = 0$$

welche nun beide Kurven zugleich giebt. (Natürlich können auf gleiche Weise so viele Kurven durch eine einzige Gleichung dargestellt werden, als man nur immer will).

Es seien z. B. die beiden Gleichungen gegeben:

$$2x + 3y - 5 = 0$$
$$3x - 4y + 8 = 0$$

von denen jede, wie in § 9 gezeigt werden wird, eine gerade Linie ergiebt. Man bilde die Gleichung

$$(2x + 3y - 5)(3x - 4y + 8) = 0$$

oder nach erfolgter Ausmultiplikation:

$$6x^2 + xy - 12y^2 + x + 44y - 40 = 0$$

welche nunmehr beide grade Linien umfasst.

Umgekehrt, wenn die linke Seite einer Gleichung:

$$F(xy) = 0$$

in zwei Faktoren zerlegt werden kann, so dass

$$F(xy) \equiv F_1(xy) \cdot F_2(xy),$$

so ist entweder

$$F_1(xy) = 0, \text{ oder } F_2(xy) = 0,$$

d. h. die Kurve zerfällt in zwei andere Kurven.

Sehr oft kann man einer Gleichung $F(xy) = 0$ gar nicht von vornherein ansehen, ob sie in zwei Gleichungen zerlegt werden kann. Wenn z. B. die vorhin aufgeschriebene Gleichung:

$$6x^2 + xy - 12y^2 + x + 44y - 40 = 0$$

ohne irgendeine Bemerkung vorgelegt worden wäre, so würde Niemand, und sei er noch so geübt im Rechnen, sofort er-

kennen, dass die linke Seite mit dem Produkt der beiden Faktoren $2x + 3y - 5$ und $3x - 4y + 8$ identisch ist, es würde vielmehr einer tiefer liegenden Untersuchung vorbehalten bleiben, diese Faktoren zu Tage zu fördern. (Vergleiche § 17). Wenn z. B. statt des ersten Coefficient 6 nur 5 stände, während alle anderen Glieder der Gleichung unverändert blieben, so würde es überhaupt zwei solche Faktoren gar nicht geben.

Diese Unmöglichkeit, einem solchen Ausdruck die etwaigen Faktoren, durch deren Ausmultiplikation er entsteht, anzusehen, wird vielfach, namentlich für minder Geübte, zu einer sehr ärgerlichen Falle, aus der sie schwer herauskommen. Häufig genug erhält man bei einer nicht ganz geschickten, aber trotzdem nicht eigentlich fehlerhaften Ableitung der Gleichung einer Kurve, die in Wirklichkeit lautet:

$$F_1(xy) = 0$$

eine ganz andere Gleichung von der Form $F(xy) = 0$, weil sich unbemerkt und irgendwie ein „überflüssiger" Faktor $F_2(x, y)$ eingeschlichen hat, so dass:

$$F(xy) \equiv F_1(xy) \cdot F_2(x, y).$$

Da nun, wie gesagt, das Zerfallen in solche Faktoren meist ohne sehr tiefe Untersuchungen gar nicht erkannt werden kann, so wird dieser überflüssige Faktor auch gar nicht bemerkt und so das sonst richtige Ergebniss stark gefälscht. (Ein Beispiel hierzu wird in § 7 gegeben werden).

Die erschöpfende Untersuchung von Funktionen wie $y = f(x)$ oder implicite $F(x, y) = 0$ ist bekanntlich Sache der Differentialrechnung. Sie lehrt aus solchen Funktionen durch Differenziren und Integriren gesetzmässig andere Funktionen ableiten, ihre analytischen Eigenthümlichkeiten finden, kurz, sie durch und durch zu kennen. Und gerade bei diesen so hochwichtigen mathematischen Untersuchungen giebt die Deutung der Funktionen als Kurven den abstrakten Formeln eine geometrische Anschaulichkeit von solcher Klarheit, dass noch kein Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung gewagt hat, die Grundbegriffe des Differentialquotienten und des Integrals, die an sich rein analytisch und durchaus ab-

strakt sind, abzuleiten, ohne sich der Elemente der analytischen Geometrie zu bedienen.

So ist der Begriff der Gleichung einer Kurve, wie ihn Cartesius im Jahre 1637 entwickelt hat, die Grundlage zum Aufbau der gesammten „höheren“ Mathematik geworden.

Bei der Schätzung der hohen Bedeutung dieses Begriffes kommt aber ausser der analytischen und geometrischen Seite noch ein Drittes in Betracht, das namentlich in den zahllosen Anwendungen der Mathematik eine hervorragende Rolle spielt, nämlich die Darstellung des gesetzmässigen Verlaufes von Erscheinungen, welche entweder analytisch durch die Formel, oder anschaulich geometrisch durch die Kurve vermittelt werden kann.

Einige Beispiele werden dies erklären.

Wenn ein Gas höherem Druck ausgesetzt wird, so wird sein Volumen kleiner, während es sich umgekehrt bei Verringerung des Druckes ausdehnt. Das Volumen ein und derselben Gasmenge hängt daher von dem Drucke und zwar bekanntlich nach dem Mariotte'schen Gesetz ab.[1]) Bezeichnet man das Volumen einer gegebenen Gasmenge, ausgedrückt in der Volumeneinheit (z. B. in Litern), mit y, den Druck ausgedrückt in Druckeinheit (z. B. in Atmosphären), mit x, und ist das Volumen bei einer Atmosphären-Spannung $= y_0$, so ist nach Mariotte (die Volumina verhalten sich umgekehrt wie die Drucke):

$$y : y_0 = \frac{1}{x} : 1 = 1 : x.$$

Daher

$$y = \frac{y_0}{x}.$$

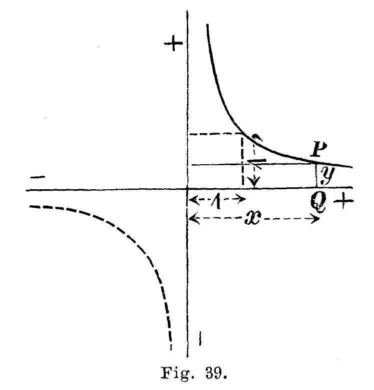


Fig. 39.

Dies ist der analytische Ausdruck der Abhängigkeit zwischen Druck und Volumen, in welchem der Einfachheit wegen $y_0 = 1$ (= 1 Liter) gesetzt werden mag, so dass nunmehr

$$y = \frac{1}{x}.$$

---

[1]) Die Temperatur kommt auch in Betracht, doch mag hiervon abgesehen werden, indem sie als unveränderlich genommen wird.

Der geometrische Ausdruck ist aber eine Kurve, welche diese Gleichung hat. Ihre Form wird in Fig. 39 dargestellt, sie ist, wie in § 12 gezeigt werden wird, eine gleichseitige Hyperbel.

Hier bedeuten also die Abscissen Drucke und die Ordinaten Volumina.

Bemerkung: In unserem Falle gehen die Gleichung und die Kurve weiter als das Mariotte'sche Gesetz selbst (ganz abgesehen davon, ob letzteres etwa ganz genau richtig ist oder nicht). Denn hier können x und y negativ werden, während ein negatives Volumen Unsinn ist. Der andere (punktirte) Ast der Hyperbel hat daher für die Darstellung des Mariotte-schen Gesetzes keine Bedeutung.

Ein zweites einfaches Beispiel bietet der freie Fall eines Körpers, der ohne Anfangsgeschwindigkeit fallen mag. Bezeichnet man die Fallzeit (in Sekunden) mit y, die Falltiefe mit x (in Metern und die Beschleunigung der Schwere mit g ($g = 9{,}81$), so ist nach den Galilei'schen Fallgesetzen:

$$y = \sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

Diese Gleichung giebt eine Parabel (Fig. 40), bei der die Ordinaten Zeiten und die Abscissen Falltiefen bedeuten. (Auch hier kommt nur ein Theil der Kurve, nämlich der obere in Betracht, da y, die Fallzeit, nicht negativ sein kann.)

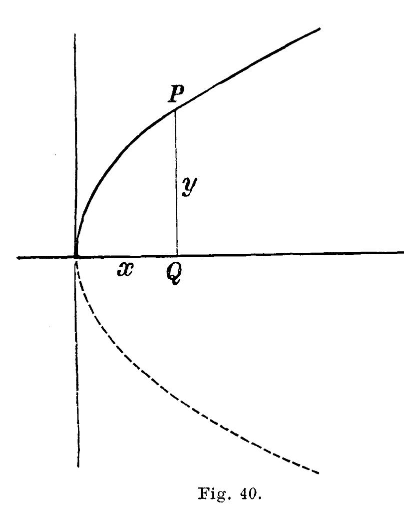


Fig. 40.

Dies wird genügen, um den tausendfältigen Gebrauch der Kurven zur Veranschaulichung von Gesetzen zu erläutern; wo aber tiefere, schwerer zu findende Resultate gehoben werden sollen, da müssen die Formeln, die Gleichungen angesetzt und der abstrakten Analyse unterworfen werden.

Aufgaben.

1. Es sei als bekannt vorausgesetzt, dass die Funktion

$$10x^2 - xy - 3y^2 - 11x + 33y - 84$$

in zwei Faktoren ersten Grades mit ganzzahligen Coefficienten zerfällt. Wie lauten diese Faktoren?

2. Man bringe die Gleichung:

$$10x^2 - xy - 3y^2 - 11x + 33y - 84 = 0$$

in die explicite Form und leite so die Faktoren der vorigen Aufgabe noch einmal ab.

3. Aus der Gleichung:

$$\sqrt{4x - 7y + 11} + \sqrt{3x - 4y + 3} + \sqrt{7x - 11y + 14} = 0$$

sind die Wurzeln fortzuschaffen. Die so transformirte Gleichung zerfällt in zwei. Welche sind diese?

---

§ 7.

Die beiden Hauptprobleme der analytischen Geometrie der Ebene.

An den Begriff der Gleichung einer Kurve knüpfen sofort die beiden Hauptaufgaben der analytischen Geometrie an, nämlich:

1. Gegeben eine irgendwie vorgelegte Kurve, zu finden ihre Gleichung.

2. Gegeben eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen (x und y), gesucht die Kurve, welche diese Gleichung hat und gesucht auch ihre geometrischen Eigenschaften.

Beispiele zur ersten Hauptaufgabe:

Eine Stange, die sich um einen festen Punkt G dreht, schiebt ein rechtwinkliges Dreieck MLK mit den Katheten b und c an einer gegebenen Linie AK entlang. Gesucht die Gleichung für den geometrischen Ort des Durchschnittspunkts C dieser Stange mit der Hypotenuse des Dreiecks.[1]

Lösung: Selbstverständlich kann von einer Gleichung erst die Rede sein, nachdem das zu Grunde gelegte Koordinatensystem angegeben. Hier empfiehlt es sich, die Linie

---

[1]) Diese Aufgabe ist aus der Geometria des Cartesius entnommen und wahrscheinlich die erste ihrer Art gewesen, welche mittelst „analytischer“ Geometrie gelöst wurde.

AK als eine Achse, die x-Achse und das Lot GA als y-Achse zu nehmen. (Die Vorzeichen sieht man aus der Figur). Die Koordinaten x und y des laufenden Punkts C sind nun mit den gegebenen Grössen, hier die Längen $a, b, c,$ und, wenn erforderlich, mit einzuführenden und zuletzt wieder zu entfernenden „Hilfsgrössen", hier $BL = z$ aus den Bedingungen der Figur so zu verknüpfen, dass zuletzt die Gleichung gebildet werden kann. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke GAL und CBL sowie der Dreiecke CBK und MLK folgt:

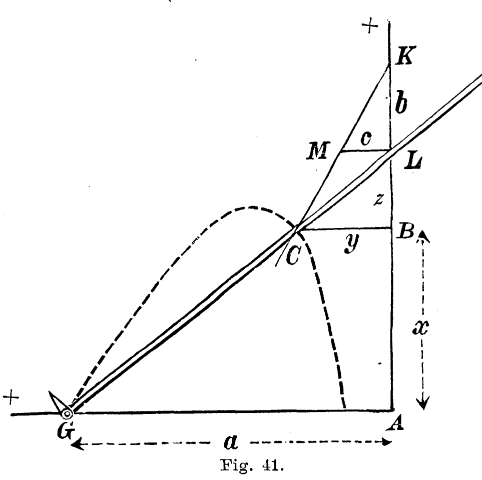


Fig. 41.

α) $a : x + z = y : z$ oder $az = y(x + z)$

β) $y : b + z = c : b$.

Dies sind zwei Gleichungen zwischen den drei Veränderlichen x, y, z. z aber ist lediglich Hilfsgrösse und muss wieder entfernt werden. Also drücke man mittelst einer Gleichung, z. B. β) z aus

$$z = b\,\frac{y - c}{c}$$

und setze in die andere Gleichung ein. Es ergiebt sich

$$ab\,\frac{y-c}{c} = y \cdot \left(x + b\,\frac{y-c}{c}\right).$$

oder nachdem ausmultiplicirt, der Nenner c entfernt und alle Glieder auf die linke Seite gebracht werden:

$$by^2 + cxy + by(a + c) - abc = 0. \qquad \textbf{1)}$$

Dies ist die gesuchte Gleichung.

Zweites Beispiel. (Fig. 42.) Von einem Punkte O aus, der von einer Geraden RQ den Abstand l hat, wird ein Strahl OQ gezogen und über Q hinaus um eine gegebene Länge $QP = d$ verlängert. Wie lautet die Gleichung der Kurve,

welche P beschreibt, wenn der Strahl um O gedreht wird. (Diese Kurve heisst nach ihrer Gestalt die Conchoide oder Muschelkurve.)

Lösung: Man nehme O zum Anfangspunkt, die Richtung OR zur $+x$-Achse und führe ausser den Koordinaten x und y des laufenden Punktes P noch als Hilfsgrösse $RQ = q$ ein. Dann ist:

$\alpha)$ $$l : q = x : y.$$

Ferner ergiebt das rechtwinklige Dreieck QTP:

$\beta)$ $$(x - l)^2 + (y - q)^2 = d^2.$$

Aus diesen Gleichungen ist noch q zu eliminiren. Aus α) folgt $q = \frac{l \cdot y}{x}$; in β) eingesetzt:

$$(x - l)^2 + \left(y - \frac{y \cdot l}{x}\right)^2 = d^2$$

oder nach Fortschaffung des Nenners und Absonderung von $(x - l)^2$

$$(x - l)^2 (x^2 + y^2) - d^2 x^2 = 0 \quad \textbf{2)}$$

als die gesuchte Gleichung.

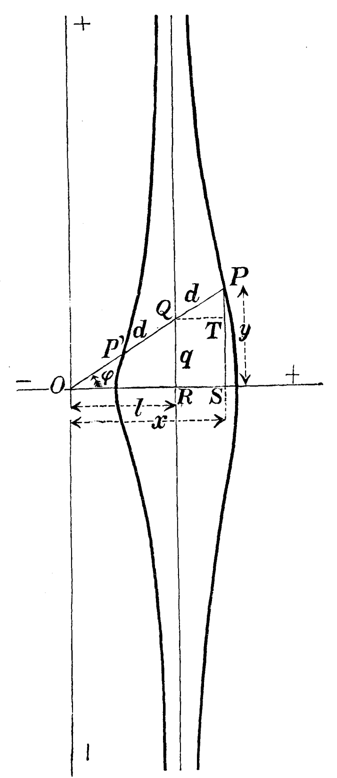


Fig. 42.

Bemerkungen zu dieser Lösung:

1. Offenbar bleiben die Gleichungen α) und β) und also auch 2) bestehen, wenn OQ nicht um d verlängert, sondern um d verkürzt wird bis P' und man nun P' als laufenden Punkt einführt. So entstehen zwei Kurven, die aber doch nur eine Gleichung haben und zwar nicht etwa eine solche, die in andere Gleichungen zerfällt (vergleiche den vorigen §). Beide Kurven sind eben anzusehen als Zweige einer einzigen durch 2) dargestellten Kurve.

2. Die Gleichung wird erfüllt für $x = O$, $y = O$, also muss die Kurve durch O hindurchgehen (?). Dies ist nun augenscheinlich ganz unmöglich, wenn, wie in der Figur angenommen $d < l$, und so scheint ein solcher Widerspruch

zwischen Kurve und Gleichung zu sein, dass es kaum aussieht, als ob er gehoben werden könnte. Und doch ist es in folgender Weise möglich: Wenn $d > l$, so geht der linke Zweig thatsächlich durch O hindurch und zwar zweimal, weil es dann zwei Punkte Q giebt, so dass $OQ = d$. Diese beiden Punkte Q sind hier nicht vorhanden, sie sind imaginär; nichtsdestoweniger bleibt trotzdem der Punkt O so bestehen, als ob die Construktion reell wäre, und seine Koordinaten müssen der Gleichung genügen, wie es sich ja auch bestätigt hat. Somit besteht die Kurve, wenn $d < l$, aus zwei Zweigen und ausserdem aus dem Punkt O, der hier isolirter Punkt oder Einsiedler heisst, weil er mit den übrigen reellen Punkten der Kurve in gar keiner Verbindung steht.

3. Noch einfacher würde die Gleichung 2) erhalten worden sein, wenn man zunächst Polarkoordinaten $OP = r$ und $\sphericalangle SOP = \varphi$ eingeführt und dann sofort aus der Figur abgelesen hätte

$$r = \frac{l}{\cos\varphi} + d, \text{ oder } r\cos\varphi = l + d\cos\varphi,$$

womit auf der Stelle die Polargleichung der Conchoide gefunden. Nun führe man nach 1) § 4 die rechtwinkligen Koordinaten durch die Formeln $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ein, so entsteht die Gleichung:

$$x = l + \frac{d \cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ oder } (x-l)\cdot\sqrt{x^2+y^2} - d \cdot x = O,$$

also endlich nach Fortschaffung der Wurzel:

$$(x-l)^2\,(x^2+y^2) - d^2x^2 = O, \qquad 2)$$

womit die Gleichung 2) wieder gefunden ist.

4. Hier lässt sich zeigen, worauf im vorigen § hingewiesen, wie sich durch ein zwar nicht falsches, aber ungeschicktes Vorgehen beim Herleiten der Gleichung ein ganz überflüssiger Faktor einschleichen kann. Gesetzt, jemand hätte zunächst wie wir die Gleichung α)

$$\alpha) \qquad x : y = l : q$$

aufgeschrieben, wäre dann aber an das Dreieck OSP statt an das Dreieck QTP gerathen und hätte so an Stelle der Gleichung β) die auch richtige Gleichung β' erhalten.

$$\beta') \quad x^2 + y^2 = (OQ + d)^2 = OQ^2 + d^2 + 2dOQ$$
$$= l^2 + q^2 + d^2 + 2d \cdot \sqrt{l^2 + q^2}$$

Nun würde er aus α) wieder $q = \frac{l \cdot y}{x}$ entwickelt, in β') eingesetzt und erhalten haben:

$$x^2 + y^2 = l^2 + \frac{l^2 y^2}{x^2} + d^2 + 2d \cdot \sqrt{l^2 + \frac{l^2 y^2}{x^2}}$$

oder nach Fortschaffen des Nenners und der Wurzel:

$$[(x^2 + y^2)(x^2 - l^2) - d^2 x^2]^2 - 4 d^2 l^2 x^2 (x^2 + y^2) = O. \qquad 2')$$

Selbstverständlich würde er nun geschlossen haben, dass 2') die Gleichung der Conchoide wäre. Da aber diese Gleichung viel complicirter ist als die früher gefundene Gleichung 2) (erstere ist vom 8ten, letztere vom 4ten Grade), so wissen wir, dass in 2') ein überflüssiger Faktor sein muss. Aber wie und wo?

Niemand, dem nur die nackte Gleichung 2') gegeben würde, könnte ihr ansehen, dass hier ein Produkt vorliegt, und selbst wenn man ihm dies sagte, würde es ihm doch nicht so leicht werden, diese Faktoren zu finden. Wenn aber, wie hier, der eine Faktor, nämlich die linke Seite von 2) bekannt ist, so ist die Auffindung des anderen Faktors bei einiger Aufmerksamkeit nicht so schwierig. Man bedenke etwa, dass in 2') l nur in der Verbindung l^2 vorkommt, dass 2') also bei Vertauschung von $+l$ mit $-l$ unverändert bleibt, was bei 2) nicht zutrifft. Also wird wohl der andere, der „überflüssige" Faktor aus 2) durch Vertauschung von $+l$ mit $-l$ entstehen. Man bilde daher das Produkt:

$$[(x - l)^2 (x^2 + y^2) - d^2 x^2] \, [(x + l)^2 (x^2 + y^2) - d^2 x^2],$$

und suche es so umzuformen, dass 2') herauskommt. Zunächst kann es in die Differenz zweier Quadrate, nämlich:

$$((x^2 + l^2)(x^2 + y^2) - d^2 x^2)^2 - 4(x^2 + y^2)^2 \cdot x^2 l^2$$

verwandelt werden. Darauf schreibe man in Hinblick auf 2'):

$$(x^2 + l^2)(x^2 + y^2) - d^2 x^2 = \underbrace{[(x^2 - l^2)(x^2 + y^2) - d^2 x^2]}_{u} + 2l^2 (x^2 + y^2),$$

also

$$((x^2 + l^2)(x^2 + y^2) - d^2 x^2)^2 = u^2 + 4 l^2 u (x^2 + y^2) + 4 l^4 (x^2 + x^2)^2$$
$$= u^2 + 4 l^2 (x^2 + y^2) [u + l^2 (x^2 + y^2)]$$
$$= u^2 + 4 l^2 (x^2 + y^2) [(x^2 + y^2) x^2 - d^2 x^2].$$

Nach Einsetzen und Fortheben von $+ 4 (x^2 + y^2)^2 x^2 l^2$ gegen

$-4(x^2+y^2)^2x^2l^2$ entsteht nun sofort wieder die Gleichung 2′). Und der überflüssige Faktor? Er giebt $=O$ gesetzt eine zur zweiten symmetrische Conchoide (Symmetrieachse ist die $+y$-Achse). Durch die ungeschickte Art der Ableitung wäre eben die Gleichung beider Conchoiden zugleich gefunden worden.

Möge daher der Anfänger gewarnt sein! Denn dieses Beispiel ist nicht etwa an den Haaren herbeigezogen, sondern so wiedergegeben, wie es dem Verfasser wirklich vorgekommen ist, als er in einer Uebungsstunde von seinen Zuhörern die Gleichung der Conchoide ableiten liess. Bei einiger Vorsicht und Uebung wird diese Klippe leicht vermieden werden.

3. Beispiel: Es ist die Gleichung der Kurve zu finden, welche irgend ein Punkt der Pleuelstange einer Dampfmaschine beschreibt. (Fig. 43)

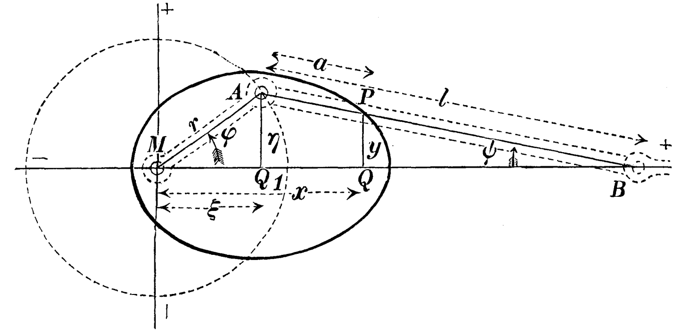


Fig. 43.

Lösung: Es sei r die Länge der Kurbel, l der Pleuelstange, a der Abstand des angenommenen Punktes von A. Man nehme M als Anfangspunkt, MB als Richtung der $+x$-Achse und führe ausserdem noch $\sphericalangle BMA = \varphi$ und $\sphericalangle MBA = \psi$ als Hilfsmittel ein. Dann folgt aus der Figur:

α) $\quad r : l = \sin\psi : \sin\varphi.$

β) $\quad x = r\cos\varphi + a\cos\psi.$

γ) $\quad y = r\sin\varphi - a\sin\psi.$

Nun gilt es noch, aus α), β) und γ) die beiden Winkel ψ und φ zu entfernen. α) und γ) ergeben:

$$\sin\psi = \frac{y}{l-a}, \quad \sin\varphi = \frac{yl}{(l-a)r},$$

und hieraus:

$$\cos\psi = \frac{\sqrt{(l-a)^2 - y^2}}{l-a}, \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{(l-a)^2 r^2 - y^2 l^2}}{(l-a)r}$$

in β) eingesetzt, folgt:

$$x = \frac{a\sqrt{(l-a)^2 - y^2} + \sqrt{(l-a)^2 r^2 - y^2 l^2}}{l-a}. \qquad 3')$$

Dies ist die gesuchte Gleichung. Sie ist in dieser Form gut zu verwenden, da sie x explicite als Funktion von y darstellt. Will man aber die Gleichung rational machen, so quadrire man zunächst einmal. Es ergiebt sich:

$$(x^2 - r^2 - a^2) + y^2 \frac{l^2 + a^2}{(l-a)^2} =$$
$$= \frac{2a}{(l-a)^2} \cdot \sqrt{(l-a)^2 r^2 - y^2 l^2} \cdot \sqrt{(l-a)^2 - y^2}$$

und endlich nach nochmaligem Quadriren:

$$[(x^2 - r^2 - a^2)(l-a)^2 + y^2 (l^2 + a^2)]^2$$
$$- 4a^2 ((l-a)^2 r^2 - y^2 l^2) \cdot ((l-a)^2 - y^2) = 0. \qquad 3)$$

Bemerkungen zu dieser Lösung:

1. Nach Ableitung einer etwas verwickelten Gleichung, wie diese hier ist, empfiehlt es sich, Proben auf ihre Richtigkeit anzustellen, da leicht ein Versehen vorgekommen sein kann. Hierzu eignen sich die beiden äussersten Lagen, die den Winkeln $\varphi = 0$ und $\varphi = 180^0$ entsprechen. Dann wird im ersten Falle $x = a + r$, $y = O$, im zweiten $x = a - r$, $y = O$. In der That findet man durch Einsetzen dieser besonderen Werthe in 3) diese Gleichung bestätigt. Auch kann man zur weiteren Kontrole noch $\varphi = 90^0$, also $\sin\varphi = 1$, $\cos\varphi = 0$ nehmen, worauf die Gleichung α) giebt:

$$\sin\psi = \frac{r}{l}, \quad \cos\psi = \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l},$$

und also nach β) und γ):

$$x = \frac{a}{l}\sqrt{l^2 - r^2}$$

$$y = r - \frac{ar}{l} = \frac{r}{l}(l-a).$$

Auch bei Einsetzen dieser Werthe stimmt die Gleichung 3). (Es werden beide Glieder $= 0$.) Sie wird also wohl richtig sein.

2. Da in 3) x und y nur in der Verbindung x^2 und y^2

vorkommen, so ist die x-Achse wie die y-Achse eine Symmetrieachse, Das erstere ist selbstverständlich, das zweite scheint aber ein Widerspruch, da die Bahn des Punktes die in Fig. 43 wiedergegebene ovale Gestalt hat, zu welcher augenscheinlich die y-Achse keine Symmetrieachse ist. Sollte dies wieder an einem überflüssigen Faktor liegen?

Diese Vermutung erweist sich als irrig, wenn die Aufgabe etwas anders, nämlich so gestellt wird:

Eine Strecke AB von gegebener Länge bewegt sich so, dass der eine Endpunkt auf einem Kreise, der andere auf einer durch dessen Mittelpunkt gehenden Geraden läuft. Welche Kurve beschreibt ein beliebiger Punkt P der Stange?

In dieser Fassung kann die ganze Figur um den Anfangspunkt herum nach links geworfen werden, was natürlich bei der ursprünglichen Aufgabe nicht vorgesehen war. Die ganze Kurve besteht also aus 2 symmetrisch zur y-Achse liegenden Ovalen, von denen hier nur das rechte in Betracht kommt. Damit ist also der scheinbare Widerspruch aufgehoben.

3. Man setze in Gleichung 3) $a = 0$. Es folgt nach Weglassung des Faktors l^4:

$$(x^2 + y^2 - r)^2 = 0,$$

also auch:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

d. h. P beschreibt einen Kreis um den Anfangspunkt mit dem Radius r, wie es sein muss, da hier P mit A zusammenfällt.

Lässt man aber P mit B zusammenfallen, setzt daher $a = l$, so folgt durch Einsetzen von 3):

$$4y^4l^4 - 4l^4y^4 = 0, \text{ d. h. } 0 = 0, \text{ also gar nichts.}$$

Was ist hier wieder geschehen? Da der Punkt B auf der x-Achse bleiben muss, so wäre zu erwarten gewesen, dass sich die Gleichung $y = 0$ oder auch $y^2 = 0$ ergeben müsste, statt dessen Identität, d. h. gar keine Gleichung mehr!

Der Grund liegt darin, dass Gleichung 3) doch einen überflüssigen Faktor hat, diesmal aber einen constanten. Setzt man nämlich $l - a = b$, $a = l - b$, so wird die Gleichung 3):

$$[(x^2 - a^2 - r^2)\, b^2 + y^2(l^2 + a^2)]^2 - 4a^2(b^2r^2 - y^2l^2)(b^2 - y^2) = 0.$$

Bei Ausmultiplication geben die Glieder, welche nicht den Faktor b^2 haben:

$$y^4(l^2 + a^2)^2 - 4a^2y^4l^2 = y^4(l^2 - a^2)^2$$
$$= y^4(l - a)^2(l + a)^2 = y^4b^2(l + a)^2,$$

d. h. durch ihre Vereinigung tritt auch hier der Faktor b^2 zum Vorschein. Er kann also überhaupt als constant bei Seite gelassen werden, worauf sich zuletzt ergiebt:

$$(x^2 - r^2 - a^2)^2(l - a)^2 + 2(x^2 - r^2 - a^2)y^2(l^2 + a^2)$$
$$+ y^4(l + a)^2 - 4a^2r^2(l - a)^2 + 4a^2y^2(l^2 + r^2) = 0, \qquad 3)$$

und setzt man hier $a = l$, so wird:

$$4(x^2 - r^2 - l^2)\, y^2l^2 + 4y^4l^2 + 4l^2y^2(l^2 + r^2) = 0,$$

oder:

$$y^2(x^2 + y^2) = 0,$$

also entweder $y^2 = 0$, d. h. $y = 0$ (wie zu erwarten), oder:

$$x^2 + y^2 = 0.$$

(Die Bedeutung dieses zweiten Faktors ist nur durch tiefes Eingehen in das Imaginäre zu ergründen.)

4. Die Pleuelstange ist selbstverständlich stets länger als die Kurbel. Setzt man aber $r = l$, so wird das zweite Glied der Gleichung 3) ein reines Quadrat, wie es das erste von vornherein ist. Jetzt also zerfällt die Gleichung in zwei von einander getrennte, nämlich in:

$$\delta)\quad (x^2 - l^2 - a^2)(l - a)^2 + y^2(l^2 + a^2) - 2al\,((l - a)^2 - y^2) = 0$$

und

$$\varepsilon)\quad (x^2 - l^2 - a^2)(l - a)^2 + y^2(l^2 + a^2) + 2al\,((l - a)^2 - y^2) = 0$$

Die Gleichung δ) lässt sich so schreiben

$$\delta)\qquad \frac{x^2}{(l + a)^2} + \frac{y^2}{(l - a)^2} - 1 = 0$$

und stellt (§ 10) eine Ellipse mit den Halbachsen $l + a$ und $l - a$ vor, während ε) nach Division mit $(l - a)^2$ die Form annimmt

$$\varepsilon)\qquad x^2 + y^2 - (l - a)^2,$$

also einen Kreis um M mit $l - a$ als Radius giebt. Woher nun dieses Zerfallen?

Im allgemeinen entsprechen jeder Lage des Punktes A (Fig. 43) zwei Punkte B, einer rechts, einer links von Q_1. Wenn aber $l = r$, dann fällt der eine dieser Punkte immer mit M zusammen, Pleuel- und Kurbelstange sind eine Linie und P beschreibt daher um M den Kreis mit dem Radius $l - a$ (siehe Gleichung ε). Der andere Punkt B aber ver-

schiebt sich auf der x-Achse wie im allgemeinen Falle und der ihm entsprechende Punkt P läuft dann auf der Ellipse mit der Gleichung δ).

Diese Beispiele zeigen deutlich, wie man bei Ableitung der Gleichung einer Kurve verfahren muss. Zunächst ist das Koordinatensystem zu wählen, wozu meistens in der Figur schon der nöthige Anhalt zu finden ist. Dann ist irgend ein Punkt der Kurve als laufender Punkt mit den Koordinaten x und y einzuführen und endlich sind, wenn erforderlich, auch noch Hilfsgrössen aufzustellen. Nunmehr hat man aus der gegebenen Konstruktion der Kurve Gleichungen zwischen x und y und den Hilfsgrössen aufzustellen und zwar hinreichend viele, dass letztere eliminirt werden können. Die dann übrigbleibende Gleichung zwischen x und y ist die gesuchte Kurvengleichung, die noch auf ihre einfachste Form zu bringen ist, wenn sie dieselbe noch nicht besitzen sollte.

Für die zweite Hauptaufgabe der analytischen Geometrie: Aus einer gegebenen Gleichung zwischen x und y diejenige Kurve, welche diese Gleichung hat, und ihre geometrischen Eigenschaften zu finden, können hier nicht so kurze und bündige Vorschriften gegeben werden.

Eines ist freilich klar. Wenn in die Gleichung für die eine Koordinate (z. B. für x), beliebige Werthe eingesetzt und nun die zugehörigen Werthe von y aus der Gleichung berechnet werden, so kann man so viel Punkte der Kurve bestimmen, als man will. Auf diesem Wege wird man stets in der Lage sein, sich durch Zeichnung derselben ein Bild von dem Verlauf der durch die Gleichung dargestellten Kurve zu verschaffen, ein Bild, das durch Häufung dieser Punkte unbegrenzt scharf und genau gemacht werden kann.

Gesetzt z. B. es sei die vorige Gleichung 2) gegeben:

$$(x - l)^2 (x^2 + y^2) - d^2x^2 = 0 \qquad \textbf{2)}$$

(aber ganz nackt, d. h. ohne jede Bemerkung, bezüglich ihres Ursprunges). [Es sei $l > d$.] Man stellt y explicit dar:

$$y = \pm \frac{x \cdot \sqrt{d^2 - (x - l)^2}}{x - l}.$$

Für jedes x erhält man zwei entgegengesetzt gleiche Werthe von y, also ist die Kurve zunächst symmetrisch zur

x-Achse. Damit diese Werthe von y reell seien, muss $[x - l] < d$ sein, d. h. die in Betracht kommenden Abscissen liegen zwischen $x = l - d$ und $x = l + d$. [Ausgenommen muss aber $x = 0$ werden, da dann $y = 0$ wird, trotzdem $\sqrt{d^2 - l^2}$ imaginär ist]. Für die Grenzwerthe von x, also $l + d$ und $l - d$ wird $y = 0$. Für den Mittelwerth $x = l$ wird $y = \pm \frac{l \cdot d}{l - l} = \pm \frac{l \cdot d}{0} = \pm \infty$.

Daraus geht hervor, dass die Kurve aus zwei Zweigen besteht, der eine links, der andere rechts von der Parallelen zur y-Achse im Abstande $x = l$, und dass jeder Zweig sich dieser Parallelen asymtotisch nähern muss. Nun sind noch für x andere Zwischenwerthe einzusetzen, um die Gestalt der Kurve genauer festzustellen. Es sei $l = 7$, $d = 4$, so wird

$$y = \pm \frac{x \cdot \sqrt{16 - (x - 7)^2}}{x - 7}.$$

x geht von $+ 3$ bis $+ 11$. Durch Einsetzen aller dazwischen liegenden ganzzahligen Werthe von x entsteht folgende kleine Tabelle:

x	y
$+ 3$	± 0
$+ 4$	$\pm \frac{4}{3} \cdot \sqrt{7} = \pm 3,5$
$+ 5$	$\pm \frac{5}{2} \cdot \sqrt{12} = \pm 8,7$
$+ 6$	$\pm \frac{6}{1} \cdot \sqrt{15} = \pm 23,2$
$+ 7$	$\pm \frac{11}{0} \cdot \sqrt{16} = \pm \infty$
$+ 8$	$\pm \frac{8}{1} \cdot \sqrt{15} = \pm 31,0$
$+ 9$	$\pm \frac{9}{2} \cdot \sqrt{12} = \pm 15,6$
$+ 10$	$\pm \frac{10}{3} \cdot \sqrt{7} = \pm 8,8$
$+ 11$	± 0

Nach Eintragung dieser Punkte (Fig. 42) ist der Verlauf

der Kurve im Grossen festgelegt. Sollte dies noch nicht hinreichen, so kann durch Einsetzen von Zwischenwerthen, z. B. $x = 3, 5; 4, 5$ etc. die Genauigkeit beliebig gesteigert werden.

Der Nutzen einer solchen punktweisen Konstruktion einer Kurve aus ihrer Gleichung liegt auf der Hand, wenn es sich vorerst um die Gestalt, den Verlauf der Kurve handelt; indessen hat in den meisten Fällen eine Untersuchung oder „Diskussion“ mehr zu leisten. Sie muss wenn möglich ein bestimmtes geometrisches Bildungsgesetz zu Tage fördern, eine besondere Konstruktion. Sie mag sogar mehrere solche liefern, da ein und dieselbe Kurve auf sehr verschiedenen geometrischen Wegen erhalten werden kann. Man hat eben zu beachten, dass durch die Gleichung nicht nur der Verlauf, die äussere Erscheinung der Kurve, sondern auch alle ihre Eigenthümlichkeiten implicite gegeben sind. Um letztere zu finden, muss die Gleichung genau besehen und der mathematischen Analyse unterworfen werden. Für den Mathematiker ist eine derartige erschöpfende Untersuchung von durch Gleichungen dargestellten Kurven das höchste Ziel der analytischen Geometrie; auf diesem Gebiet hat er sich zu bethätigen, um durch die Feinheit und Schärfe der angewendeten Methoden und durch den Reichthum an Gesichtspunkten für die Untersuchung vorwärts zu schreiten.

Selbstverständlich kann ein Elementarbuch nicht in die weiten Fernen dieser Theorie führen, wohl aber muss es für die einfacheren Kurven bis zu einem gewissen Grade vollständig in solche Untersuchungen eindringen, zumal gerade diese Kurven in allen Anwendungen die grösste Rolle spielen. Und diese Aufgabe wird von nun an in den Vordergrund treten.

Kehren wir aber noch einmal zu unserer Gleichung 2) zurück, um an diesem Beispiel zu zeigen, wie in einfacheren Fällen eine derartige Gleichung zu „deuten“ ist. Der dort vorkommende Ausdruck $x^2 + y^2$ ist nach 1) § 4, mit dem Quadrat der Entfernung r des laufenden Punktes P von O identisch, so dass die Gleichung auch so geschrieben werden kann:

$$(x - l)^2 \cdot r^2 - d^2x^2 = 0, \text{ also}$$

$$r = \pm \frac{d \cdot x}{x - l}.$$

Für den rechten Zweig ist das $+$, für den linken das $-$ Zeichen zu nehmen. Diese Gleichung eignet sich schon eher für eine geometrische Konstruktion. Man gehe aber noch weiter, schreibe die letzte Gleichung (das Zeichen $+$ genommen) in Gestalt einer Proportion:

$$r : d = x : x - l$$

und beachte, dass andererseits die Figur selbst auch eine Proportion liefert, nämlich:

$$r : PQ = x : x - l.$$

Durch Vergleichung erhält man nun:

$$PQ = d,$$

womit jetzt dieselbe Konstruktion der Conchoide aus ihrer Gleichung zurückerhalten wird, von der wir vorher ausgegangen waren.

Aufgaben.

1. Gegeben ein Rechteck $ABCD$. Gesucht Gleichung des geometrischen Ortes aller Punkte P, für welche $AP + CP = BP + DP$. (Man setze $AB = 2a$, $BC = 2b$ und wähle die beiden Mittellinien zu Achsen.

2. Gegeben $P_1 (+1, -2)$ $P_2 (-3, +1)$. Gesucht Gleichung des geometrischen Ortes aller Punkte P, für welche $\sphericalangle P_1PP_2$ (links herum) $= 45^0$.

3. Die gemeine oder Bernoulli'sche Lemniskate ist der geometrische Ort aller Punkte, für welche das Produkt der Entfernungen von zwei festen Punkten F_1 und F_2 (deren Abstand $= 2e$) constant und zwar $= e^2$ ist. Gesucht die Gleichung. Nachher sind Polarkoordinaten einzuführen.

4. Unter Antiparallelogramm versteht man eine von vier Strecken gebildete Figur, die entsteht, wenn diese Strecken ursprünglich die Seiten eines Parallelogramms waren, und dann eines der beiden Dreiecke, in welche es durch eine Diagonale getheilt wird, um diese umgeklappt worden ist. Wenn nun diese vier Seiten als starre, um die Ecken drehbare Stangen angesehen werden und die eine Stange festgehalten wird, welche Kurve beschreibt dann die Mitte der gegenüberliegenden Stange?

§ 8.

Parameterdarstellung von Kurven. Kurvenschaaren. Transcendente und algebraische Kurven.

Ausser der Gleichung giebt es noch eine andere, viel benutzte analytische Darstellungsform der Kurven, die Parameterdarstellung, darin bestehend, dass man x und y durch eine dritte Grösse, den sogenannten Parameter [1]) ausdrückt; eine Grösse, die irgend eine, bei der Darstellung selbst aber zurücktretende geometrische Bedeutung hat. Bezeichnet man diesen Parameter mit t, so wird die allgemeinste Parameterdarstellung durch Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(t) \\ y &= \varphi_2(t) \end{aligned} \qquad 1)$$

gegeben, wo φ_1 und φ_2 irgend welche Funktionen von t bezeichnen.

Die Gleichung der Kurve aber würde erhalten werden, wenn man aus 1) t eliminirte.

Beispiele. 1. Die Gleichungen 3) und 4) § 5; also:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \\ y &= \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} \end{aligned}\right\} \text{ oder } \quad \begin{aligned} x &= x_1 + \mu\,(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + \mu\,(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

geben die durch zwei Punkte $P_1(x_1 y_1)$, $P_2(x_2 y_2)$ gehende Gerade, einmal durch den Parameter λ, das andre mal durch μ. Dass hier λ und ebenso μ ein Verhältniss zwischen P_1, P_2 und dem laufenden Punkt darstellt, ist dabei ganz nebensächlich. Durch Elimination von λ oder μ entsteht daher die Gleichung der Geraden. Durch Ausführung der Rechnung überzeugt man sich leicht, dass in der That in beiden Fällen dieselbe Gleichung entsteht, nämlich

$$ax + by + c = 0$$

wo

$$\begin{aligned} a &= y_2 - y_1 \\ b &= -(x_2 - x_1) \\ c &= -x_1 y_2 + y_1 x_2. \end{aligned}$$

---

[1]) Das Wort Parameter hat in der Mathematik eine sehr vielseitige Bedeutung erlangt; in der Regel bezieht es sich auf eine Grösse, die neben anderen, hauptsächlich betrachteten, eine Rolle spielt.

2. Ferner stellen die Gleichungen: 2) § 4

$$x = r \cdot \cos \varphi$$
$$y = r \cdot \sin \varphi$$

einen Kreis vor, wenn φ als Parameter angesehen wird. Die Elimination von φ mittelst der Gleichung $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ giebt sofort

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

also die Kreisgleichung selbst.

3. Ein drittes Beispiel liefert die gemeine Cycloide, wie sie als Bahn eines Punktes der Peripherie eines Kreises entsteht, der auf einer Geraden rollt. Man nehme (Fig. 44) diese Gerade als x-Achse und den Punkt O, mit welchen der betrachtete Kreispunkt in seiner tiefsten Stellung zusammenfällt, als Anfangspunkt. Nachdem ein Stück PS des Kreisumfanges, dessen zugehöriger Centriwinkel φ hier als Parameter eingeführt werden soll, abgerollt ist, sei O nach P gekommen. Zunächst giebt die Bedingung des Rollens: Strecke OS = Bogen PS, d. h.

$$OS = \varrho \cdot \varphi$$

und nun folgt unter Benutzung des Dreiecks PRM

$$x = \varrho\,(\varphi - \sin \varphi)$$
$$y = \varrho\,(1 - \cos \varphi).$$

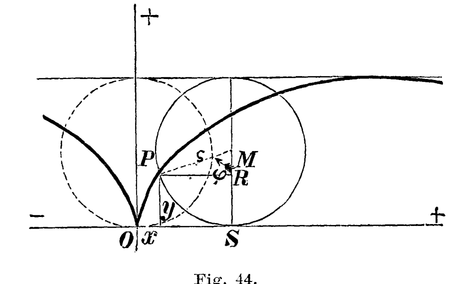


Fig. 44.

Damit ist die Parameterdarstellung der Cycloide gewonnen. Um ihre Gleichung zu bilden, eliminirt man φ. Aus der zweiten Gleichung ergiebt sich:

$$\cos \varphi = \frac{\varrho - y}{\varrho}, \text{ also}$$

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{\varrho^2 - (\varrho - y)^2}}{\varrho}$$

$$\text{und } \varphi = \text{arc}\left(\cos = \frac{\varrho - y}{\varrho}\right).$$

Daher durch Einsetzen in die erste Gleichung:

$$x = \varrho \cdot \text{arc}\left(\cos = \frac{\varrho - y}{\varrho}\right) - \sqrt{\varrho^2 - (\varrho - y)^2}.$$

Man pflegt aber hier die Parameterdarstellung vorzuziehen,

wie überhaupt stets eine einfache Parameterdarstellung einer verwickelten Gleichung überlegen ist. Denn aus ersterer kann man sofort durch Einsetzen verschiedener Werthe für den Parameter so viel Punkte der Kurve ermitteln, als man will, während bei einer derartigen Gleichung die Koordinatenberechnungen sehr schwierig werden können.

In der Regel wird daher eine passende Parameterdarstellung beibehalten und nicht durch Elimination des Parameters in die Endgleichung verwandelt werden. Wo sich andererseits Gelegenheit bietet, eine passende Parameterdarstellung einzuführen, soll sie benutzt werden.

So war z. B. die Polargleichung der Conchoide:

$$r = \frac{l}{\cos\varphi} + d.$$

Setzt man diesen Werth von r in die Formeln für die rechtwinkligen Koordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ein, so wird:

$$x = l + d\cos\varphi,$$
$$y = l\operatorname{tg}\varphi + d\sin\varphi,$$

also eine Parameterdarstellung dieser Kurve.

Man kann statt des Parameters φ, der hier in trigonometrischer Form erscheint, leicht algebraische und zwar rationale Funktionen eines anderen Parameters einführen, wenn man $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = t$ setzt. Dann ist:

$$\sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Eingesetzt:

$$x = \frac{(l+d)+(l-d)t^2}{1+t^2}$$
$$y = \frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{(l+d)+(l-d)t^2}{1+t^2}.$$

Aus der Parameterdarstellung entsteht die Endgleichung durch Elimination. Die umgekehrte Aufgabe, aus einer Gleichung $F(x,y) = 0$ eine Parameterdarstellung zu finden, ist aber augenscheinlich gar nicht bestimmt, da man irgend eine von x und y abhängige Grösse als Parameter einführen kann. Nimmt man z. B. x selbst als Parameter, so geht die erste der Gleichungen 1) in $x = x$ über und fällt fort, während

die zweite $y = \varphi_2(x)$ die explicite Form der Kurvengleichung darstellt.

Wenn die Gleichung complicirt ist, wird man meist vergeblich nach einer passenden Parameterdarstellung ausschauen, zuweilen aber findet man eine solche bei geschickter Benutzung besonderer Eigenthümlichkeiten der Gleichung.

Ist z. B. die Gleichung[1])

$$x^3 + y^3 - axy = 0$$

gegeben, so setze man $\frac{y}{x} = t$, $y = xt$; so folgt:

$$x^3 + x^3 t^3 - ax \cdot xt = 0,$$

daher nach Division mit x^2 und Berechnung von x:

$$x = \frac{a \cdot t}{1 + t^3}$$

und also:

$$y = \frac{a \cdot t^2}{1 + t^2}$$

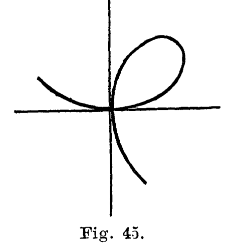


Fig. 45.

womit eine Parameterdarstellung von grosser Einfachheit hergestellt worden ist.

Welches ist denn hier eigentlich die vorhin betonte Eigenthümlichkeit der vorgelegten Gleichung $x^3 + y^3 - axy = 0$? Offenbar der Umstand, dass nur Glieder dritten und zweiten Grades auftreten und man sieht wohl, dass dieselbe Substitution $\frac{y}{x} = t$ ebenso schnell zu einer einfachen Parameterdarstellung führt, wenn die Gleichung allgemein nur Glieder n^{ten} und $n-1^{\text{ten}}$ Grades enthält.

Bisher ist immer nur eine einzige vorgelegte Kurve Gegenstand der Betrachtung gewesen. Zuweilen ist man aber in der Lage, gleichzeitig unzählig viele Kurven in's Auge fassen zu müssen, z. B. alle Geraden, welche einen Kreis berühren oder alle Kreise, welche zwei gegebene Kreise berühren etc. Solche Kurven, die man eine Kurvenschaar nennt, kann man nun nicht jede einzeln durch ihre Gleichung

[1]) Sie ist die Gleichung einer von Cartesius angegebenen Kurve, des Cartesischen Blattes, welches die in Fig. 45 angegebene Form hat.

aufschreiben, weil ihrer eben unendlich viele vorhanden sind. Man kommt in einem solchen Falle mit einer Gleichung aus, wenn in diese Gleichung ausser x und y noch ein oder mehrere Parameter $\lambda, \mu \ldots$ aufgenommen werden. Denn wenn eine solche Gleichung von der Form:

$$f(x, y, \lambda, \mu \ldots) = 0$$

vorliegt, so stellt sie als Gleichung zwischen x und y bei gegebenen Werthen von $\lambda, \mu \ldots$ eine Kurve vor. Aendert man aber diese Parameter $\lambda, \mu \ldots$, so ändert sich auch die Kurve und insofern stellt die Gleichung alle diese Kurven zugleich vor. So ist z. B. die Gleichung jeder Geraden, die durch den Anfangspunkt geht, von der Form:

$$y = m \cdot x,$$

und die Gleichung

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

stellt alle concentrischen Kreise um den Anfangspunkt vor, wenn r als Parameter angesehen wird, der für denselben Kreis constant bleibt, aber von einem Kreis zum anderen seinen Werth wechselt.

Bemerkung. Je nachdem nur ein Parameter λ, oder zwei λ und μ, oder drei: λ, μ und ν u. s. w. vorhanden sind, nennt man die Kurvenschaar von einfach, zweifach, dreifach u. s. w. unendlicher Mannigfaltigkeit. So bilden alle geraden Linien der Ebene eine zweifach unendliche, alle Kreise der Ebene eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit. Selbstverständlich muss bei dieser Eintheilung angenommen werden, dass sich die Zahl der Parameter nicht auf eine geringere zurückführen lässt. Wenn jemand die Gleichung

$$ax + by + c = 0$$

hinschreibt und a, b, c als drei Parameter ansieht, so ist trotzdem die Kurvenschaar (sie besteht aus allen geraden Linien) nur von der doppelten Mannigfaltigkeit, da man z. B. nach der Division durch a

$$x + \frac{b}{a} y + \frac{c}{a} = 0$$

nur noch zwei Parameter $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ zur Verfügung hat.

Der Begriff der Gleichung einer Kurve giebt Veranlassung die Kurven einzutheilen in algebraische und transcendente. Algebraisch heisst eine Kurve, wenn in ihrer Gleichung mit x und y nur algebraische Operationen (Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Potenziren und Wurzelausziehen) vorgenommen worden sind. Im andern Falle heisst die Kurve transcendent.

So stellt z. B. die Gleichung

$$\sqrt{x^2 - y + 3} + \sqrt[3]{3x^5 + 4y^2} - 7 = 0$$

eine algebraische Kurve vor; die Cycloide dagegen ist eine transcendente Kurve, da in ihrer Gleichung ausser algebraischen Ausdrücken noch ein transcendenter, nämlich arc $\left(\cos = \frac{\varrho - y}{\varrho}\right)$ enthalten ist und in diesem transcendenten Ausdruck die Koordinate y vorkommt.

Das eigentliche Feld der analytischen Geometrie sind die algebraischen Kurven. Aus folgenden Gründen: Erstens sind die einfachsten und wichtigsten Kurven, gerade Linie, Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel algebraisch, zweitens giebt es für algebraische Kurven Eintheilungsprinzipien (z. B. nach dem Grade ihrer Gleichung), die bei transcendenten Kurven fehlen, und drittens ist eine allgemeine Theorie der transcendenten Kurven gar nicht zu geben, da die höhere Mathematik die verschiedensten Arten transcendenter Funktionen kennt. Transcendente Kurven findet man daher fast nur in Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung zur Veranschaulichung der transcendenten Funktionen oder auch in praktischen Anwendungen der analytischen Geometrie, bei welchen es meist auf den äusseren Verlauf dieser Kurven ankommt, der natürlich aus der Gleichung stets herausgebracht werden kann, ob diese nun algebraisch oder transcendent ist.

Für die Folge werden daher nur noch algebraische Kurven betrachtet werden. Da ist zuerst die Bemerkung am Platze, dass ihre Gleichungen stets in eine ganz bestimmte Form gebracht werden können. Nenner brauchen nicht geduldet zu werden, da man sie durch Ausmultiplikation entfernen kann und ein gleiches gilt für etwa vorkommende Wurzelausdrücke, die auch stets durch geeignete Umformung, durch das sogenannte Rationalmachen der Gleichung, aus

dieser eliminirt werden können, wie die höhere Algebra lehrt. Wenn dann in der so reducirten Gleichung alle etwa vorhandenen Klammerausdrücke durch Auflösung der Klammer zum Verschwinden gebracht werden, so kann die Gleichung zuletzt nur noch Glieder von der Form:

$$c \cdot x^p \cdot y^q$$

enthalten, wo c eine Constante und p und q ganze Zahlen sind, wobei selbstverständlich gleichartige Glieder, d. h. solche Glieder, in denen p und auch q dieselben Werthe haben, zu einem einzigen Gliede zu vereinigen sind. So z. B. verwandelt sich auf diese Weise die Gleichung der Conchoide 2) § 8

$$(x - l)^2 \cdot (x^2 + y^2) - d^2x^2 = 0$$

wenn das Quadrat $(x - l)^2$ in $x^2 - 2lx + l^2$ aufgelöst und mit $x^2 + y^2$ multiplicirt wird, in

$$x^4 + x^2y^2 - 2lx^3 - 2lxy^2 + (l^2 - d^2)\, x^2 + l^2y^2 = 0.$$

Definition: Grad eines Gliedes $c \cdot x^p \cdot y^q$ ist die Zahl $p + q$, die Summe der Exponenten. Der Grad einer Constanten c ist hiernach $= 0$ zu setzen, da $c = c \cdot x^0 \cdot y^0$ geschrieben werden kann.

Hiernach enthält die Gleichung der Conchoide zwei Glieder vierten, zwei dritten und zwei zweiten Grades.

Definition: Der Grad einer von Wurzeln und Nennern befreiten und in Glieder von der Form:

$$c \cdot x^p \cdot y^q$$

aufgelösten Gleichung ist der höchste vorkommende Grad. Dieser Grad wird der Kurve beigelegt, worauf man ihn auch mit Ordnung bezeichnet. So spricht man von Kurven ersten Grades oder erster Ordnung (der geraden Linie), den Kurven zweiten Grades oder zweiter Ordnung u. s. w. Unsere Conchoide ist eine Kurve vierter Ordnung.

Dass der höchste Grad ausschlaggebend ist, gleichgiltig ob nur ein oder ob mehrere Glieder diesen Grad erreichen, wird durch folgenden Satz von äusserster Wichtigkeit bewiesen:

Lehrsatz: Der Grad der Gleichung einer Kurve ist von der Wahl des Koordinatensystems ganz unabhängig.

Beweis. Nach § 4 sind die Transformationsformeln von der Form:

$$x = a + a_1 x' + a_2 y'$$
$$y = b + b_1 x' + b_2 y'.$$

Ist $F(x, y) = 0$ die Gleichung der Kurve im ersten System, so wird die Gleichung im neuen System selbstverständlich durch Einsetzen dieser Formeln erhalten. Es sei nun $c \cdot x^p \cdot y^q$ ein Glied in $F(x, y)$. Aus demselben wird nach der Transformation

$$c \cdot (a + a_1 x' + a_2 y')^p \cdot (b + b_1 x' + b_2 y')^q.$$

Entwickelt man nun die Potenzen nach dem polynomischen Lehrsatz und multiplicirt aus, so entspringen hieraus eine ganze Reihe von Gliedern der neuen Gleichung. Nun ist klar, dass der eine Faktor $(a + a_1 x' + a_2 y')^p$ nur Glieder 0ten, 1ten, 2ten u. s. w. bis p^{ten} Grades, und ebenso der andere Faktor $(b + b_1 x' + b_2 y')^q$ nur Glieder 0ten, 1ten, 2ten u. s. w. bis q^{ten} Grades geben kann. Ihr Produkt enthält also nur Glieder 0ten, 1ten u. s. w. bis $p + q^{\text{ten}}$ Grades. Ist daher das angenommene Glied $c \cdot x^p \cdot y^q$ nicht vom höchsten Grade n, so entstehen aus ihm nur Glieder, die auch nicht den höchsten Grad erreichen. Ist es aber vom höchsten Grade, d. h. ist $p + q = n$, so entspringen ausser Gliedern niederen Grades auch Glieder vom Grade n. Daher kann durch die Transformation der Grad niemals erhöht werden. Es bliebe nur noch die Möglichkeit, dass bei der Vereinigung entsprechende Glieder nach der Transformation die Glieder n^{ten} Grades sich gegenseitig aufheben, der Grad also erniedrigt würde. Aber auch dies ist ausgeschlossen, weil sonst die umgekehrte Transformation von $x'y'$ in xy diesen niederen Grad erhöhen würde, da dann die ursprüngliche Gleichung wieder entsteht. Also muss der Grad n derselbe bleiben, q. e. d.

Nach § 4 sind nicht allein die Transformationen von rechtwinkligen zu anderen rechtwinkligen, sondern auch von rechtwinkligen zu schiefwinkligen und auch von schiefwinkligen zu anderen schiefwinkligen Koordinaten vom ersten Grade, folglich gilt der Beweis ganz allgemein.

Demnach giebt der Grad der Gleichung ein vortreffliches Eintheilungsprinzip für die Kurven, das sich ausserordentlich bewährt hat. Sie werden eingetheilt in Kurven erster Ordnung (die geraden Linien), in Kurven zweiter Ordnung (Kreis,

Ellipse, Hyperbel, Parabel und zwei gerade Linien), Kurven dritter Ordnung u. s. w.

Selbstverständlich wird die Untersuchung der geometrischen Eigenschaften von Kurven um so schwieriger, je höher ihre Ordnung. Es hat sich als zweckmässig erwiesen, die Kurven erster und zweiter Ordnung abgesondert zu behandeln, schon weil sie ungleich häufiger angewendet werden, als Kurven höheren Grades. Sie bilden ein in sich abgeschlossenes Gebiet, das in jedem Lehrbuch der analytischen Geometrie ausführlich behandelt werden muss. Darüber hinaus pflegt man nun nicht stufenweise zu Kurven dritten, vierten u. s. w. Grades fortzuschreiten, sondern sofort die höheren algebraischen Kurven zu betrachten. Diese Betrachtungen lehnen sich aber so innig an die Forschungen der höheren Analysis an, dass sie sich für ein Lehrbuch, welches die Elemente bringen soll, nicht eignen. Indessen ist es doch gut, wenigstens die einfachsten allgemeinen Sätze über algebraische Kurven zu kennen, weshalb dieselben jetzt hier, wenn auch zum Theil ohne Beweis, zusammengestellt werden sollen.

Man spricht zunächst von der allgemeinen Gleichung ersten, von der allgemeinen Gleichung zweiten Grades u. s. w. im Gegensatz zu einer besonderen Gleichung ersten, zweiten u. s. w. Grades. So ist die allgemeine Gleichung ersten Grades von der Form:

$$ax + by + c = 0,$$

wenn die drei Coefficienten zwar als gegebene, aber beliebig gegebene Zahlen angesehen werden, so dass gar keine Voraussetzung über sie gemacht werden darf, falls die Gleichung allgemein bleiben soll. Sie können vielmehr irgendwelche Werthe haben. (Ausgenommen natürlich, dass alle drei $= 0$ sind, weil dann die Gleichung zu einer Identität wird, d. h. aufhört, eine Gleichung zu sein.)

Demnach hat die allgemeine Gleichung ersten Grades drei Glieder, eines von der Form $a \cdot x$, eines von der Form $b \cdot y$ und ein constantes Glied c. Dies schliesst nicht aus, dass in besonderen Fällen weniger Glieder angetroffen werden. Fällt z. B. die Gerade mit der x-Achse zusammen, so hat sie die Gleichung $y = 0$.

Hier ist nur das zweite der drei Glieder vorhanden. Wenn man jedoch will, kann man die Gleichung so schreiben, als ob sie alle drei Glieder hätte, nämlich:

$$0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 = 0.$$

Es ist also hier $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ zu setzen, um aus der allgemeinen Gleichung ersten Grades die Gleichung der x-Achse zu machen.

Die allgemeine Gleichung ersten Grades umfasst eben so zu sagen alle geraden Linien und jede derselben giebt einen besonderen Fall dieser Gleichung.

Dasselbe ist für die Gleichungen zweiten, dritten u. s. w. Grades zu sagen. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades ist von der Form:

$$a \cdot x^2 + b \cdot xy + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0.$$

Sie hat 6 Glieder, von denen wieder in besonderen Fällen einige fehlen können (weil die zugehörigen Coefficienten null sind), wie z. B. bei der Mittelpunktsgleichung des Kreises:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Ebenso ist die allgemeine Gleichung dritten Grades von der Form:

$$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 y + c \cdot xy^2 + d \cdot y^3 + e \cdot x^2 + f \cdot xy + g \cdot y^2 + h \cdot x + i \cdot y + k = 0.$$

Sie enthält 10 Glieder. Wenn man so weiter geht, dann ist die erste Frage nach einer Formel für die Anzahl der Glieder einer Gleichung n^{ten} Grades. Sie ist sehr leicht zu finden. Eine solche Gleichung enthält

ein konstantes Glied (ein Glied 0ten Grades),
zwei Glieder ersten Grades,
drei Glieder zweiten Grades,
vier Glieder dritten Grades
u. s. w. bis
$n + 1$ Glieder n^{ten} Grades.

Also ist die Anzahl der Glieder der allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades

$$= 1 + 2 + 3 \ldots . + n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Daher enthält eine solche Gleichung auch $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Coefficienten $a, b, c \ldots .$ Man beachte aber durchaus, dass es

nicht auf diese Coefficienten selbst, sondern nur auf ihre Verhältnisse ankommt, denn wenn sie z. B. alle dreimal so gross werden sollen, so multiplicire man die Gleichung mit 3. Daher kann auch ein beliebiger Coefficient $= 1$ gemacht werden, indem man die Gleichung durch ihn dividirt. (Ausgenommen, wenn dieser Coefficient zufällig $= 0$ ist, weil dann die anderen Coefficienten unendlich gross würden).

Eine gerade Linie ist durch zwei ihrer Punkte bestimmt. Sie ist auch durch einen Punkt und ihre Richtung, oder auch durch ihre Richtung und den Abstand von einem gegebenen Punkt bestimmt (im letzteren Falle allerdings zweideutig, da es zwei solche Linien giebt). Man kann noch auf viele andere Weisen eine Gerade durch Bedingungen bestimmen, immer aber werden es ihrer zwei sein, oder doch schliesslich auf zwei zurückführbar sein. Jede Bedingung giebt nämlich für die Coefficienten a, b, c eine Gleichung, und da, wie eben erläutert, einer derselben beliebig angenommen werden kann, so haben wir dann zwei Gleichungen zwischen zwei Unbekannten $\left(\text{etwa } \frac{a}{c} \text{ und } \frac{b}{c}\right)$, aus denen diese zu bestimmen sind.

Auf Kurven n^{ten} Grades übertragen giebt dies den

Lehrsatz: Eine Kurve n^{ter} Ordnung ist durch $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ Bedingungen bestimmt.

Im besonderen ist also eine Kurve n^{ter} Ordnung durch $\frac{n \cdot (n+3)}{2}$ ihrer Punkte bestimmt, daher eine Kurve 2ter Ordnung durch 5, eine Kurve 3ter Ordnung durch 9 Punkte u. s. w.[1]) Die zugehörige Gleichung wird natürlich so gefunden, dass man die allgemeine Gleichung:

$$a \cdot x^n + b \cdot x^{n-1}y + \ldots . = 0$$

ansetzt, in dieselbe für den laufenden Punkt (x, y) der Reihe nach die Koordinaten des ersten, dann des zweiten, dann des

[1]) Dies gilt im allgemeinen. Im besonderen lehrt die Theorie der höheren Kurven Ausnahmen kennen. So gehen z. B. alle Kurven 3ten Grades, welche durch 8 Punkte gehen, auch noch durch einen neunten Punkt hindurch und durch solche 9 Punkte ist daher eine Kurve dritten Grades nicht bestimmt.

dritten Punkts einsetzt und nun, $a, b, c, d \ldots.$ oder vielmehr ihre Verhältnisse als die zu ermittelnden Unbekannten ansieht. Man erhält so $\frac{n \cdot (n+3)}{2}$ Gleichungen ersten Grades für $a, b, c \ldots.$

Ein Beispiel wird dies am besten erläutern.

Aufgabe (Fig. 46): Eine Kurve zweiter Ordnung geht durch fünf Punkte $P_1(-1, 0)$ $P_2(+5, 0)$ $P_3(0, +3)$ $P_4(0, -2)$ $P_5(+2, +3)$. Wie lautet ihre Gleichung?

Lösung: Man nehme die allgemeine Gleichung zweiten Grades: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ und setze hier der Reihe nach die Koordinaten der fünf Punkte ein. So entstehen die fünf Gleichungen:

$$a - d + f = 0$$
$$25a + 5d + f = 0$$
$$9c + 3e + f = 0$$
$$4c - 2e + f = 0$$
$$4a + 6b + 9c + 2d + 3e + f = 0.$$

Es wird sich empfehlen, alle Coefficienten durch f auszudrücken. Die beiden ersten Gleichungen ergeben:

$$a = -\frac{f}{5}, d = +\frac{4f}{5}.$$

Ebenso folgt aus der dritten und vierten Gleichung:

Fig. 46.

$$c = -\frac{f}{6}, \quad e = +\frac{f}{6}.$$

In die letzte Gleichung eingesetzt:

$$-\frac{4f}{5} + 6b - \frac{3}{2}f + \frac{8}{5}f + \frac{f}{2} + f = 0$$

$$b = -\frac{2f}{15}.$$

Der Coefficient f bleibt ganz willkürlich. Man macht ihn am besten gleich dem kleinsten Generalnenner, also $= 30$,

damit alle Coefficienten ganze Zahlen werden. Mit $f = 30$ wird nun:

$$a = -6,\ b = -4,\ c = -5,\ d = +24,\ e = +5,\ f = +30,$$

so dass die gesuchte Gleichung lautet:

$$-6x^2 - 4xy - 5y^2 + 24x + 5y + 30 = 0,$$

deren Richtigkeit man nun hinterher durch Einsetzen der Punkte erproben kann.

Die Kurve ist, wie in § 17 gezeigt werden wird, eine Ellipse.

Anmerkung: Wenn drei der fünf gegebenen Punkte auf einer geraden Linie liegen, so zerfällt die Kurve in zwei gerade Linien, nämlich in die eben bezeichnete Gerade und die Verbindungslinie der zwei letzten Punkte. Liegen aber gar vier von den fünf Punkten in einer Geraden, so gehen durch sie unzählig viele Kurven zweiter Ordnung, von denen jede aus dieser Geraden und irgend einer anderen durch den fünften Punkt gehenden Geraden besteht. In diesem Falle wird also die Aufgabe unbestimmt, wie man sich auch leicht an irgend einem Beispiel durch Durchrechnung überzeugen kann.

Wenn zwei Kurven, die eine von der Ordnung m, die andere von der Ordnung n gegeben sind:

$$F(x, y) = 0,\ \varphi(x, y) = 0,$$

so müssen die Koordinaten x, y eines etwaigen Schnittpunktes derselben beide Gleichungen erfüllen. Und umgekehrt: Wenn die Koordinaten (xy) eines Punktes beiden Gleichungen genügen, so ist er ein gemeinsamer Punkt beider Kurven, also ein Schnittpunkt. Daher werden die Schnittpunkte erhalten, wenn man beide Gleichungen zusammenstellt und aus ihnen x und y als „Unbekannte" berechnet. Wie die höhere Algebra lehrt, giebt es im allgemeinen $m \cdot n$ Werthepaare (x,y) für diese Unbekannten (die allerdings zum Theil oder auch alle imaginär sein können). Also:

Eine Kurve m^{ter} und eine Kurve n^{ter} Ordnung schneiden sich in $m \cdot n$ (reellen oder imaginären) Punkten.

Dass dieser Satz richtig ist, lässt sich wenigstens in einem besonderen Falle leicht zeigen. Gesetzt, sowohl $F(xy)$ als auch $\varphi(x,y)$ zerfallen in Faktoren ersten Grades. Dann

besteht die erste Kurve aus m, die andere aus n geraden Linien und die Schnittpunkte sind nichts anderes als die gemeinsamen Punkte je einer der m ersten mit je einer der n letzten Linien. Es sind ihrer demnach $m \cdot n$. q. e. d.

Wird $m = 1$ gesetzt, so erhält man als besonders wichtigen Fall:

Eine Kurve n^{ter} Ordnung wird von jeder geraden Linie in n Punkten geschnitten.

Der Satz über die Anzahl der Schnittpunkte hat aber auch Ausnahmen. Es können zwei der Punkte „zusammenfallen“, dann berühren sich die Kurven in diesem Punkt, anstatt sich zu schneiden. [Fallen dort aber 3 Punkte zusammen, so spricht man von einer Berührung oder Osculation 2ter Ordnung, bei 4 Punkten von einer solchen 3ter Ordnung u. s. w.] Es kann aber auch sein, dass beide Kurven zerfallen und dass sie eine Theilkurve gemeinsam haben. Dann sind nur noch die Schnittpunkte derjenigen Kurven zu ermitteln, die nach Abzug dieser Theilkurve übrig bleiben.

Aufgaben.

1. Eine Kurve ist durch folgende Parameterdarstellung gegeben:

$$x = \frac{5 + 3u - u^2}{2 + 7u + u^2}, \quad y = \frac{6 - 4u - 11u^2}{2 + 7u + u^2}$$

gesucht ihre Gleichung.

2. Gegeben eine Kurvenschaar:

$$\frac{x^2}{25 - \lambda} + \frac{y^2}{9 - \lambda} - 1 = 0.$$

(Konfokale Kegelschnitte). Es sollen diejenigen Kurven der Schaar gefunden werden, welche durch $P(\pm 3, \pm 2, 4)$ hindurchgehen.

3. Die Kurve mit der Gleichung:

$$x^2 + xy + 3x - 5 = 0$$

geht durch $P(+1, +1)$. Es soll eine Parameterdarstellung gefunden werden, indem durch P und einen beliebigen Punkt der Kurve eine Gerade gezogen und der Richtungscoefficient m als Parameter eingeführt wird.

§ 9.

Die Kurve erster Ordnung oder die gerade Linie. Verschiedene Formen ihrer Gleichung. Die Hesse'sche Normalform. Lot von einem Punkt auf eine gerade Linie. Zwei gerade Linien.

Satz: Die gerade Linie ist eine Kurve erster Ordnung.

Beweis: Es seien $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ zwei gegebene Punkte auf ihr, dann liefert 4) § 5 folgende Parameterdarstellung:

$$x = x_1 + \mu(x_2 - x_1)$$
$$y = y_1 + \mu(y_2 - y_1).$$

Die Elimination von μ giebt

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

oder:

$$x(y_2 - y_1) + y(x_1 - x_2) + (x_2 y_1 - y_2 x_1) = 0.$$

Setzt man daher:

$$y_2 - y_1 = a,\ x_1 - x_2 = b,\ x_2 y_1 - y_2 x_1 = c$$

so wird die Gleichung der geraden Linie:

$$ax + by + c = 0. \qquad \textbf{1)}$$

q. e. d.

Umkehrung dieses Satzes: Jede Gleichung ersten Grades stellt eine gerade Linie dar.

Beweis: Es sei 1) die vorgelegte Gleichung und $P_1(x_1 y_1)$, $P_2(x_2 y_2)$ seien zwei Punkte, deren Koordinaten diese Gleichung erfüllen, also:

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$
$$ax_2 + by_2 + c = 0.$$

Löst man nach a und b auf, so folgt:

$$a = \frac{c(y_2 - y_1)}{x_2 y_1 - y_2 x_1},\ b = \frac{c(x_1 - x_2)}{x_2 y_1 - y_2 x_1}.$$

Da c willkürlich ist, so setze man $c = x_2 y_1 - y_2 x_1$, worauf $a = y_2 - y_1$, $b = x_1 - x_2$.

Die Gleichung wird also:

$$x(y_2 - y_1) + y(x_1 - x_2) + (x_2 y_1 - y_2 x_1) = 0$$

und ist identisch mit der vorhin abgeleiteten Gleichung einer geraden Linie durch P_1 und P_2. q. e. d.

Sind die Coefficienten numerisch gegeben, z. B.:

$$3x - 4y + 11 = 0,$$

so ermittele man zur zeichnerischen Darstellung der geraden Linie irgend zwei Punkte, z. B. die beiden mit den Abscissen

$$x_1 = -3,\ x_2 = +4.$$

Man erhält durch Einsetzen sofort:

$$y_1 = +\frac{1}{2},\ y_2 = +\frac{23}{4}$$

und ziehe nun durch die beiden Punkte $P_1\left(-3, +\frac{1}{2}\right)$, $P_2\left(+4, +\frac{23}{4}\right)$ die Gerade hindurch.

Bemerkung: Theoretisch ist eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt, in der Zeichnung aber wird die Lage eines dritten Punktes auf ihr um so ungewisser, je weiter er von beiden entfernt ist. Da macht sich so recht der Vortheil der Gleichung geltend. Gesetzt, das Papier sei so lang, dass auch noch der Punkt mit der Abscisse $x = +100$ darauf ist, so wird sich bei Ausmessung der Ordinate mit dem Lineal meist ein nicht unbeträchtlicher Fehler herausstellen, der vermieden wird, wenn man in die Gleichung $x = +100$ setzt, was $y = +\frac{311}{4} = +77^3/_4$ giebt.

Dies gilt allgemein. Geometrische Konstruktionen haben in der Regel den grossen Vorzug, einfach und leicht zu sein, während die Rechnung, zumal, wenn die einzusetzenden Grössen mehrere Dezimalen haben, langwieriger ausfällt. Dafür sind aber die Ergebnisse der letzteren völlig genau oder wenigstens kann man ihre Genauigkeit so scharf machen, wie man will; bei der Zeichnung aber auf dem Papier mit Zirkel und Lineal ist hier eine Grenze gestellt. Soll z. B. ein Punkt als Durchschnitt zweier Geraden geometrisch construirt werden, so wird man seine Lage schwerlich bis auf mehr als $^1/_{10}$ mm genau bestimmen können, da die Geraden eine gewisse Dicke haben, und auch hiervon abgesehen, selbst bei sorgfältigster Zeichnung von ihrer richtigen Lage etwas abweichen werden. Wird die Konstruktion sehr verwickelt, so kann leicht das Endergebniss durch Häufung der kleinen unvermeidlichen Fehler ganz gefälscht werden, und dem hilft nur die Rechnung ab unter Zugrundelegung der analytischen Formeln. Am besten wird man freilich fahren, wenn man

nicht allein die Konstruktion durch die Rechnung, sondern auch die Rechnung durch die Konstruktion controlirt, schon um grobe Rechenfehler sofort zu erkennen.

Die allgemeine Gleichung ersten Grades

$$ax + by + c = 0$$

hat drei Glieder, von denen im besonderen einige verschwinden können, weil ihre Coefficienten zu 0 werden. Es sei:

1. $c = 0$, die Gerade geht durch O, denn die Gleichung wird erfüllt für $x = 0$, $y = 0$,
2. $b = 0$, die Gerade ist $\parallel$ zur y-Achse, denn die Gleichung giebt $x = -\frac{c}{a}$ für jeden Werth von y,
3. $a = 0$, die Gerade ist $\parallel$ zur x-Achse, denn die Gleichung giebt $y = -\frac{c}{b}$ für jeden Werth von x,
4. $b = 0$, $c = 0$, so folgt $a \cdot x = 0$ oder $x = 0$, d. h. die Gerade ist die y-Achse selbst,
5. $a = 0$, $c = 0$, so folgt $b \cdot y = 0$ oder $y = 0$, d. h. die Gerade ist die x-Achse selbst,
6. $a = 0$, $b = 0$, dann enthält die Gleichung weder x noch y, sie widerspricht sich.

Um diesen Fall klar zu stellen, nehme man an, dass a und b zunächst nicht $= 0$, sondern sehr klein seien. Dann kann die Gleichung $ax + by + c = 0$ nur erfüllt werden, wenn x oder y oder auch beide sehr gross werden, wenn also die Gerade sehr weit entfernt ist. Daher kann man auch sagen:

Die Gleichung:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$$

stellt die unendlich fernen Geraden vor.

Sind aber endlich alle drei Coefficienten $= 0$, so wird die Gleichung zur Identität, sie stellt dann überhaupt keine Gerade mehr, oder wenn man will: Sie stellt dann alle Geraden dar.

Spezielle Formen der Gleichung einer Geraden. (Fig. 47.)

1. Man führe die beiden Abschnitte p und q auf den Achsen ein. Hierzu setze man in 1) erst den Punkt $A(p, 0)$, dann den Punkt $B(0, q)$ ein. Es folgt:

$$ap + c = 0,\ bq + c = 0,\ \text{also}\ p = -\frac{c}{a},\ q = -\frac{c}{b},$$

oder auch $a = -\frac{c}{p}$, $b = -\frac{c}{q}$.

Nach Einsetzen dieser Werthe von a und b und Fortlassung des Faktors $-c$ ergiebt sich:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0 \qquad \textbf{1a)}$$

als die erste specielle Form der Gleichung der Geraden. Sie versagt augenscheinlich ihre Dienste, wenn die Gerade durch O geht, weil dann $p = 0$ und $q = 0$, also $\frac{1}{p} = \infty$ und $\frac{1}{q} = \infty$ werden.

2. Man stelle y explicite dar:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Auch hier haben die Coefficienten einfache Bedeutungen. Zunächst ist $-\frac{c}{b} = q$. Ferner wird:

$$-\frac{a}{b} = -\frac{\frac{c}{b}}{-\frac{c}{a}} = -\frac{q}{p} = \operatorname{tg}\varphi = m,$$

also, was besonders wichtig zu merken ist:

$$\text{Richtungscoefficient } m = \operatorname{tg}\varphi = -\frac{a}{b} = -\frac{\text{Coefficient von } x}{\text{Coefficient von } y}. \qquad \textbf{2)}$$

Die zweite specielle Form wird daher:

$$y = m \cdot x + q. \qquad \textbf{1b)}$$

Sie versagt, wenn die Gerade || zur y-Achse, weil dann $b = 0$ und m und q unendlich werden.

3. Man stelle x explicite dar:

$$x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a},\ \text{oder}$$

$$x = \frac{1}{m}y + p. \qquad \textbf{1c)}$$

Diese Form versagt, wenn die Gerade || zur y-Achse.

So angenehm diese speciellen Formen 1a), 1b) und 1c) auch für den praktischen Gebrauch sind, schon weil p, q und

m so einfache geometrische Bedeutung haben, was bei den Coefficienten a, b, c der allgemeinen Form nicht zutrifft, so haben sie, wie eben gezeigt, doch den Nachtheil, in besonderen Fällen unbrauchbar zu werden. Diesem Uebelstande hat der Mathematiker Hesse durch Einführung einer vierten speciellen Form abgeholfen, die nach ihm die Hesse'sche Normalform genannt wird.

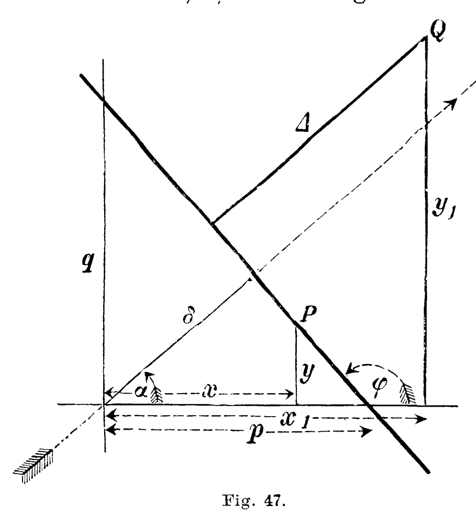


Fig. 47.

Hesse nimmt als Bestimmungsstücke für die Gerade das Lot δ vom Anfangspunkt und seinen Richtungswinkel α. Es ist (Fig. 47):

$$p = \frac{\delta}{\cos\alpha}, \quad q = \frac{\delta}{\sin\alpha}.$$

Durch Einsetzen in 1a) folgt somit:

$$\frac{x}{\frac{\delta}{\cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{\delta}{\sin\alpha}} - 1 = 0$$

oder:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - \delta = 0. \qquad \textbf{1d)}$$

Dies ist die Hesse'sche Normalform. Hier wird δ absolut genommen, so dass in der Normalform das constante Glied negativ sein muss. Der Richtungswinkel α bezieht sich stets auf die Richtung vom Anfangspunkt zum Fusspunkt, so dass für zwei parallele Linien, die den Anfangspunkt einschliessen, sich die beiden Werthe für α um 180^0 unterscheiden, was einen Wechsel der Vorzeichen von $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ zur Folge hat. Geht aber die Gerade durch den Anfangspunkt selbst, so kann selbstverständlich der eine oder der andere Richtungswinkel genommen werden.

Ist die allgemeine Form:

$$ax + by + c = 0$$

gegeben und soll aus ihr die Normalform werden, so kann offenbar nichts anderes geschehen, als dass man mit einem noch zu bestimmenden Faktor λ multiplicirt:

$$\lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0.$$

Soll dies die Normalform sein, so müssen nach 1 d) die drei Gleichungen bestehen:

$$\lambda \cdot a = \cos \alpha,$$
$$\lambda \cdot b = \sin \alpha,$$
$$\lambda \cdot c = - d.$$

Aus den beiden ersten folgt durch quadriren und addiren:

$$\lambda^2 (a^2 + b^2) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

$$\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}$$

und demnach

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \alpha &= \frac{b}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}\right\} \operatorname{tg} \alpha = + \frac{b}{a} = - \frac{1}{-\frac{a}{b}} = - \frac{1}{m}.$$

$$\delta = - \frac{c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}},$$

während die Normalform wird:

$$\frac{ax + by + c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} = 0.$$

Daher die einfache Regel: Um die allgemeine Form in die Normalform zu verwandeln, dividire man die linke Seite durch $\pm \sqrt{a^2 + b^2}$, wobei das Vorzeichen so zu wählen ist, dass das letzte Glied negativ wird.

Nehmen wir z. B. wieder die Gleichung

$$3x - 4y + 11 = 0$$

so ist durch $- \sqrt{3^2 + 4^2} = - 5$ zu dividiren, daher die Normalform:

$$- \frac{3}{5} x + \frac{4}{5} y - \frac{11}{5} = 0$$

und:

$$\cos \alpha = - \frac{3}{5}, \ \sin \alpha = + \frac{4}{5}, \ \delta = \frac{11}{5}.$$

Dass die Normalform für eine wirklich gegebene Linie nie versagt, ist klar. Denn cos α und sin α sind beide echte Brüche und δ kann auch nur unendlich werden, wenn die

Gerade unendlich fern ist. [Dagegen wird die Normalform für die Nulllinien (§ 3) unbrauchbar, weil für diese $\cos \alpha = \sin \alpha = \pm \infty$].

Die grosse Wichtigkeit der Hesse'schen Normalform zeigt sich sofort bei der folgenden Fundamentalaufgabe:

Gegeben eine Gerade l durch ihre Gleichung in der Normalform:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0$$

und irgend ein Punkt der Ebene $P(x_1, y_1)$ durch seine Koordinaten. Gesucht der Abstand $\varDelta$ zwischen P und l. (Fig. 47.)

Man projicire x_1 und y_1 auf die Richtung des Lotes (die Pfeilrichtung). Dann ist

die Projektion von $x_1 = x_1 \cos \alpha$

„ „ „ $y_1 = y_1 \sin \alpha$.

Ihre Summe ist nach der Figur $= \delta + \varDelta$. Also:

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha = \delta + \varDelta$$

und hieraus:

$$\varDelta = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - \delta. \qquad \textbf{3)}$$

Soll diese Formel für alle Lagen von P richtig sein, so ist $\varDelta$ ein Vorzeichen zu geben. Denn wenn z. B. der Punkt P mit 0 auf derselben Seite von l liegt, so ist die Summe $x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha =$ der Differenz der absoluten Werthe von δ und $\varDelta$.

Der Inhalt der Formel 3) kann nach 1 d) folgendermaassen ausgesprochen werden.

Setzt man in die linke Seite der Normalform statt x und y die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Ebene ein, so erhält man sofort die Länge des Lotes von diesem Punkt auf die Gerade und zwar mit dem Zeichen + oder —, je nachdem P und O auf verschiedenen oder auf derselben Seite von l liegen.

Ist aber die Gleichung der geraden Linie nicht in der Normalform, sondern etwa in der allgemeinen Form:

$$ax + bx + c = 0$$

gegeben, so stelle man zunächst durch Division mit $\pm \sqrt{a^2 + b^2}$ die Normalform her, worauf die Formel 3) ergiebt:

$$\varDelta = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad \textbf{3')}$$

Beispiel: Gegeben l: $3x - 4y + 11 = 0$ und $P(+2 + 3)$, so folgt:

$$\Delta = \frac{3 \cdot (+2) - 4 \cdot (+3) + 11}{-5} = -\frac{5}{5} = -1,$$

d. h. der Abstand ist = der Längeneinheit und P liegt mit O auf derselben Seite von l.

Aufgabe: Gegeben zwei Linien l_1 und l_2 durch ihre Gleichungen.

$$l_1) \quad a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$l_2) \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0.$$

Gesucht die Koordinaten ihres Durchschnittspunktes $P(x,y)$.

Lösung: Da dieser Punkt sowohl auf der einen, als auch auf der andern Geraden liegt, so müssen seine Koordinaten beiden Gleichungen genügen. Man stelle daher beide Gleichungen zusammen und berechne aus ihnen x und y als „Unbekannte". Es ergiebt sich:

$$x = \frac{-c_1 b_2 + b_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}, \quad y = \frac{-a_1 c_2 + c_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}.$$

Bemerkung: x und y sind hier Brüche mit demselben Nenner, der nur von den Coefficienten der Glieder ersten Grades, aber nicht von den Constanten c_1 und c_2 abhängt. Als Determinante geschrieben wird er:

$$a_1 b_2 - b_1 a_2 = \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}.$$

Aber auch die Zähler werden solche Determinanten, nämlich:

$$-c_1 b_2 + b_1 c_2 = \begin{vmatrix} -c_1, & b_1 \\ -c_2, & b_2 \end{vmatrix}; \quad -a_1 c_2 + c_1 a_2 = \begin{vmatrix} a_1, & -c_1 \\ a_2, & -c_2 \end{vmatrix}$$

so dass die Brüche als Quotienten von Determinanten erscheinen:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c_1, & b_1 \\ -c_2, & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1, & -c_1 \\ a_2, & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Dies ist deswegen wichtig zu bemerken, weil es in ganz gleicher Weise für die Auflösung von n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten gilt, wie in § 18 bei der Lehre von den Determinanten gezeigt werden wird.

Ist der Nenner $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$, so werden x und y im allgemeinen beide unendlich. l_1 und l_2 müssen also parallel sein, wie sich auch *a* posteriori beweisen lässt, wenn man die beiden Richtungscoefficienten von l_1 und l_2 einander gleich setzt. Denn da nach 2)

$$m_1 = -\frac{a_1}{b_1},\ m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$$

so liefert die Bedingung $m_1 = m_2$:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \text{ oder } a_1b_2 - b_1a_2 = 0.$$

Fallen die Linien zusammen, so muss die Proportion bestehen:

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2.$$

Hieraus folgt:

$$a_1b_2 - b_1a_2 = 0;\ -c_1b_2 + b_1c_2 = 0;\ -a_1c_2 + c_1a_2 = 0$$

x und y erhalten beide die Form $\frac{0}{0}$, sie werden unbestimmt, wie es sein muss.

Aufgabe: Gegeben seien zwei Linien l_1 und l_2 durch ihre Gleichungen:

$$l_1)\ a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$l_2)\ a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Gesucht der Winkel φ unter welchen sie sich schneiden.

Lösung: Streng genommen hätte in der Aufgabe nicht der Winkel, sondern die Winkel gesagt werden müssen. Denn auf jeder der beiden Linien giebt es zwei entgegengesetzte Richtungen und da man irgend eine dieser vier Richtungen als Anfangsrichtung nehmen kann, so ergeben sich hieraus $4 \cdot 2 = 8$ Kombinationen. Nimmt man die Anfangsrichtung auf l_1, die Endrichtung auf l_2, lässt es aber unbestimmt, welche Richtung von l_1, beziehungsweise von l_2 gewählt werden, so ist nichtsdestoweniger, wie in § 2 ausführlich gezeigt, tg φ eindeutig durch die Formel bestimmt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1} = \frac{a_1b_2 - b_1a_2}{a_1a_2 + b_1b_2}. \quad \textbf{4)}$$

Im besonderen folgt hieraus der Satz:

Stehen zwei Gerade senkrecht aufeinander, so ist das Produkt aus den beiden Coefficienten von x entgegengesetzt gleich dem Produkt aus den beiden Coefficienten von y, d. h.:

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0. \quad \textbf{5)}$$

So sind z. B. die beiden Geraden

$$2x + 5y - 7 = 0$$
$$5x - 2y + 11 = 0$$

auf einander senkrecht, weil das eine Produkt $= + 10$, das andere $= - 10$ ist. $\left(\text{Es ist } m_1 = -\frac{2}{5},\ m_2 = +\frac{5}{2}.\right)$

Aufgaben.

1. Gegeben $P_1\,(+2, -3)$, $P_2\,(+5, -1)$. Gesucht Gleichung der geraden Linie durch sie in ihren verschiedenen Formen.

2. Gegeben $P_1\,(+2, -3)$, $P_2\,(+5, -1)$. Gesucht Gleichung der geraden Linie, welche von P_1 den Abstand 6 und von P_2 den Abstand 4 hat.

3. Durch den Punkt $P\,(+1, +2)$ soll eine Linie gezogen werden, welche vom Koordinatensystem ein Dreieck von gegebenen Flächeninhalt $= 8$ abschneidet. Zu finden ihre Gleichung.

---

§ 10.

Strahlenbüschel. Einführung abgekürzter Bezeichnungen. Die Koordinaten *u* und *v* der geraden Linie.

Wenn zwei Linien l_1 und l_2 durch ihre Gleichungen gegeben sind:

$$l_1)\ a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$l_1)\ a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

so werden letztere für den Durchschnittspunkt erfüllt. Sie sind für ihn beide „richtig“. Daraus folgt, dass jede aus diesen Gleichungen gebildete neue Gleichung ebenfalls für diesen Punkt richtig ist. Im besonderen gilt dies für eine lineare Verbindung der beiden Gleichungen; d. h. für eine Gleichung von der Form:

$$\lambda_1\,(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda_2\,(a_2x + by_1 + c_2) = 0 \qquad \mathbf{1)}$$

oder:

$$x\,(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) + y\,(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) + (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) = 0. \qquad \mathbf{1)}$$

Diese Gleichung stellt, wenn λ_1 und λ_2 gegeben sind, wieder eine Gerade vor, wir haben in ihr eine dritte Linie l, welche durch den Durchschnittspunkt der beiden andern geht, ja wir haben sogar, da λ_1 und λ_2 beliebig gewählt werden können, alle durch diesen Punkt gehenden Geraden; wir haben,

kurz gesagt, in 1) das gesammte Strahlenbüschel vor uns, das durch die beiden ursprünglich gegebenen Linien l_1 und l_2 bestimmt ist.

Z. B. seien gegeben die beiden Geraden

$$3x - 4y + 11 = 0$$
$$2x + 5y - 7 = 0.$$

Es werde die erste Gleichung mit $+ 3$, die zweite mit $- 4$ multiplicirt[1]) und addirt. Es folgt:

$$x - 32y + 61 = 0,$$

womit unfehlbar eine dritte Gerade bestimmt ist, die durch denselben Punkt geht, wie die beiden anderen. Macht man die Probe durch Zeichnen, so wird sie stimmen; auch kann man aus den beiden ersten Gleichungen x und y berechnen und in die dritte einsetzen, so wird diese auch richtig sein.

Diese Bildungsweise des analytischen Ausdruckes 1) für ein Strahlenbüschel zeichnet sich durch den Umstand aus, dass in ihm die Koordinaten des Centrums gar nicht vorkommen. Sie werden eben nicht gebraucht und daher absichtlich umgangen oder ausgeschaltet. Um diese Methode in recht scharfes Licht zu stellen, empfiehlt es sich, für die ganze linke Seite einer Gleichung, also für $ax + by + c$ einen einzigen Buchstaben, ein Symbol U zu setzen, so dass U nichts weiter sein soll als eine abkürzende Bezeichnung für $ax + by + c$, was durch die Gleichung angezeigt wird:

$$U \equiv ax + by + c.$$

Demnach sei:

$$U_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1$$
$$U_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2,$$

worauf der Satz folgende Form erhält:

Sind $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ die Gleichungen zweier Geraden, so stellt die Gleichung:

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = 0$$

eine dritte Gerade vor, die durch den Durchschnittspunkt der beiden ersten geht.

Offenbar kommt es nur auf das Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2$ an, denn setzt man $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \lambda$, so kann die dritte Gleichung nach Division mit λ_1 oder λ_2 auch geschrieben werden:

[1]) Das heisst natürlich, beide Seiten mit $+ 3$, resp. $- 4$ multipliciren.

$$U_1 + \lambda U_2 = 0, \text{ oder } \frac{U_1}{\lambda} + U_2 = 0.$$

Diese Gleichung mit dem Parameter λ giebt somit ein Strahlenbüschel. (Vergleiche § 8 über Kurvenschaaren.) Zwei dieser Strahlen sind $U_1 = 0$ und $U_2 = 0$ selbst (entsprechend $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ oder $\frac{1}{\lambda} = 0$).

Uebrigens mag hier erwähnt werden, dass diese Methode, Gleichungen linear zu verbinden, für die Entwickelung der analytischen Geometrie von grösstem Einfluss gewesen ist, da U_1 und U_2 auch Funktionen höheren Grades sein können, in welchem Falle Büschel von Kurven höherer Ordnung entstehen, wie Kreisbüschel und allgemeine Büschel von Kurven 2ten Grades u. s. w. Alle Kurven eines solchen Büschels gehen durch eine bestimmte Anzahl fester (reeller oder imaginärer) Punkte hindurch, nämlich die Schnittpunkte der beiden Kurven $U_1 = 0$, $U_2 = 0$.

Es bedarf wohl kaum des Hinweises, dass, wenn die Geraden $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ einander parallel sind, auch die Gerade $U_1 + \lambda U_2 = 0$ zu ihnen parallel ist. Das Büschel wird eben in solchem Falle zu einem Parallelstrahlenbüschel.

Einige Beispiele werden den vielseitigen Gebrauch, den man von der hier auseinandergesetzten analytischen Theorie der Strahlenbüschel machen kann, am besten erläutern.

Aufgabe: Gegeben zwei Gerade:

$$U_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$
$$U_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,$$

und irgend ein Punkt $P_1(x_1, y_1)$. Gesucht die Gleichung der Geraden, die durch P_1 und den Schnittpunkt der beiden Geraden hindurchgeht.

Die Lösung ist so einfach, dass sie sofort niedergeschrieben werden kann. Sie ist:

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1} - \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2} = 0.$$

Denn erstens geht die Gerade mit dieser Gleichung durch den Schnittpunkt der beiden gegebenen Geraden, weil ihre Gleichung aus denen der letzteren linear zusammengesetzt ist und zweitens geht sie auch durch $P_1(x_1, y_1)$, weil bei Einsetzen

desselben an Stelle des laufenden Punktes x, y beide Brüche $= 1$ werden.

Aufgabe. Gegeben die Gleichungen zweier Geraden in der Normalform:

$$U_1 \equiv x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - \delta_1 = 0,$$
$$U_2 \equiv x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - \delta_2 = 0,$$

zu finden die Gleichungen der beiden Winkelhalbirenden.

Lösung: Es sei $P\ (x, y)$ ein Punkt auf einer der Winkelhalbirenden. Dann sind die beiden Lote Δ_1 und Δ_2 von diesem Punkte auf die beiden Geraden $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ einander absolut gleich und zwar nach § 9 auch dem Vorzeichen nach, wenn die Winkelhalbirende durch denjenigen Winkelraum hindurchgeht, in welchem O liegt, während für die andere Winkelhalbirende entgegengesetzte Zeichen gesetzt werden müssen. Es ist also im ersten Falle:

$$\Delta_1 - \Delta_2 = 0,$$

im zweiten Falle:

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 0.$$

Nun ist nach § 9:

$$\Delta_1 = U_1,\ \Delta_2 = U_2,$$

d. h. die Gleichungen der beiden Winkelhalbirenden sind:

$$U_1 \pm U_2 = 0.$$

Jetzt seien $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ die Gleichungen dreier Geraden in der Normalform, und es werde (der Einfachheit wegen) angenommen, dass O innerhalb des von ihnen gebildeten Dreiecks liege. Dann sind:

$$U_1 - U_2 = 0,$$
$$U_2 - U_3 = 0,$$
$$U_3 - U_1 = 0$$

die Gleichungen der drei Innenwinkelhalbirenden. Ihr blosser Anblick zeigt auf der Stelle, dass sie sich in einem Punkte schneiden, denn durch Addition erhält man identisch $0 = 0$, d. h. aus zwei der Gleichungen folgt sofort die dritte. Aber auch zwei Aussenwinkelhalbirende und die dritte Innenwinkelhalbirende, z. B.:

$$U_1 + U_2 = 0,$$
$$U_2 + U_3 = 0,$$
$$U_1 - U_2 = 0,$$

zeigen durch die Form ihrer Gleichungen sofort einen gemein-

samen Schnittpunkt an, denn die dritte Gleichung entsteht durch Subtraction der beiden ersten.

Aufgabe. Es seien wieder gegeben drei Gerade. (Gleichungen brauchen nicht Normalform zu haben):

$$U_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$
$$U_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,$$
$$U_3 \equiv a_3 x + b_3 y + c_3 = 0.$$

Es sollen die Gleichungen der drei Höhen des von ihnen gebildeten Dreiecks gefunden werden.

Lösung: Die Gleichung der Höhe auf $U_3 = 0$ ist von der Form:

$$U_1 + \lambda U_2 = 0$$

oder

$$x(a_1 + \lambda a_2) + y(b_1 + \lambda b_2) + (c_1 + \lambda c_2) = 0.$$

Sie soll auf $U_3 = 0$ senkrecht stehen; giebt nach 5) die Bedingung:

$$(a_1 + \lambda a_2)a_3 + (b_1 + \lambda b_2)b_3 = 0,$$

und hieraus:

$$\lambda = -\frac{a_1 a_3 + b_1 b_3}{a_2 a_3 + b_2 b_3}.$$

Somit die Gleichung der Höhe:

$$U_1 - \frac{a_3 a_1 + b_3 b_1}{a_2 a_3 + b_2 b_3} U_2 = 0,$$

oder:

$$U_1(a_2 a_3 + b_2 b_3) - U_2(a_3 a_1 + b_3 b_1) = 0.$$

Ganz ebenso werden die Gleichungen der beiden andern Höhen gefunden:

$$U_2(a_3 a_1 + b_3 b_1) - U_3(a_1 a_2 + b_1 b_2) = 0,$$
$$U_3(a_1 a_2 + b_1 b_2) - U_1(a_2 a_3 + b_2 b_3) = 0.$$

Da auch hier die Addition identisch $0 = 0$ ergiebt, so sieht man auf der Stelle, dass die drei Höhen sich in einem Punkte schneiden.

Eine etwas tiefer gehende Anwendung der linearen Verbindung von Gleichungen und der abgekürzten Aufschreibung derselben giebt die Betrachtung zweier perspektivischer Dreiecke.

Definition. Zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ (Fig. 48) liegen perspektivisch, wenn die Verbindungslinien AA_1, BB_1, CC_1 sich in einem Punkte treffen. Von zwei solchen Dreiecken gilt der Satz:

Haben Dreiecke perspektivische Lage zu einander, so liegen die drei Schnittpunkte entsprechender Seiten (E-Schnitt von BC und B_1C_1, F-Schnitt von CA und C_1A_1, G-Schnitt von AB und A_1B_1) einer Geraden.

B e w e i s: Es seien (Fig. 48) $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ die Gleichungen der drei Seiten des Dreiecks ABC, $V_1 = 0$,

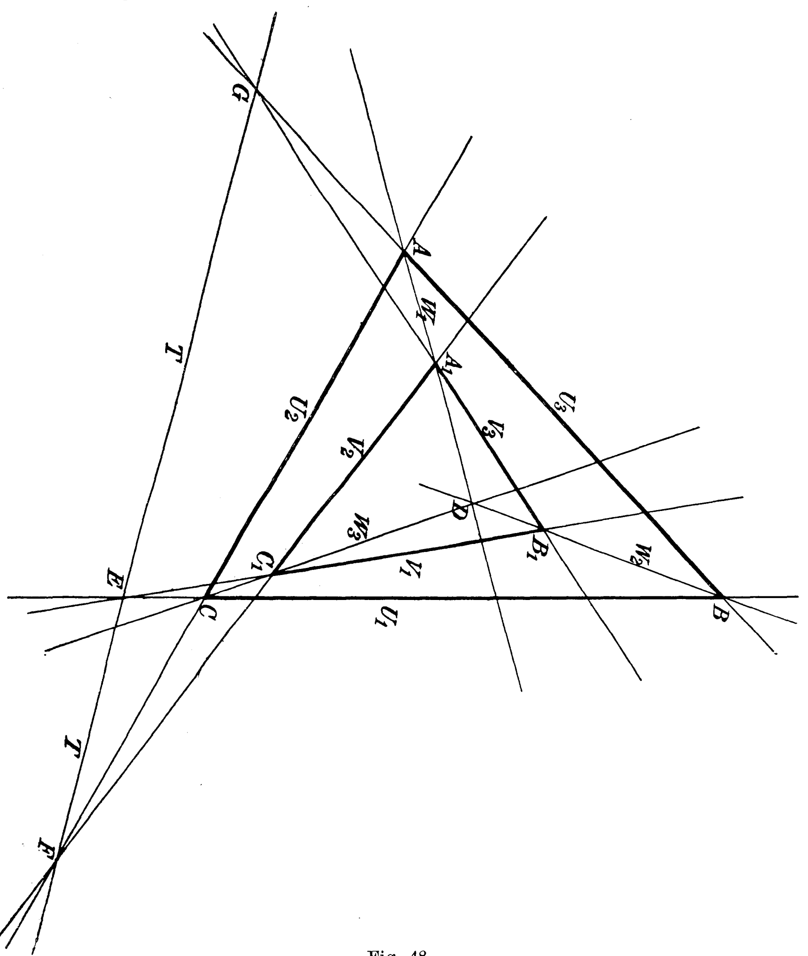


Fig. 48.

$V_2 = 0$, $V_3 = 0$ diejenigen des Dreiecks $A_1B_1C_1$ und endlich $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, $W_3 = 0$ die Gleichungen der drei Verbindungslinien AA_1, BB_1, CC_1. Da $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, $W_3 = 0$

sich in einem Punkte D treffen, so muss eine Identität von der Form:

$$\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \lambda_3 W_3 = 0$$

bestehen.

Hier kann ohne weiteres $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ gesetzt werden, da man vorher W_1, W_2 und W_3 mit λ_1, λ_2, λ_3 multipliciren kann. Also ist zunächst die Identität zu verzeichnen:

$$\text{I)} \quad W_1 + W_2 + W_3 \equiv 0 \text{ (Punkt } D\text{)}.$$

Da $W_1 = 0$ durch den Schnittpunkt von $U_1 = 0$ und $U_2 = 0$ geht, so muss W_1 von der Form sein:

$$W_1 \equiv aU_2 + bU_3$$

und ebenso:

$$W_2 \equiv cU_3 + dU_1,$$
$$W_3 \equiv eU_1 + fU_2.$$

Dies in I eingesetzt, giebt:

$$(d + e)U_1 + (a + f)U_2 + (b + c)U_3 = 0.$$

Da nun $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ nicht durch einen Punkt gehen, so kann zwischen U_1, U_2, U_3 keine Identität stattfinden, also zerfällt die Gleichung in drei, nämlich:

$$d + e = 0,\ b + c = 0,\ a + f = 0,$$
$$\text{d. h. } d = -e,\ b = -c,\ f = -a,$$

und die vorangegangenen drei Identitäten werden:

$$W_1 \equiv aU_2 - cU_3,$$
$$W_2 \equiv cU_3 - eU_1,$$
$$W_3 \equiv eU_1 - aU_2,$$

durch deren Addition die Identität I nun von selbst entspringt.

Setzt man der Einfachheit wegen voraus, dass U_1, U_2, U_3 schon vorher mit a, c und e multiplicirt waren, so wird einfacher:

$$\text{II)} \quad W_1 \equiv U_2 - U_3 \text{ (Punkt } A\text{)}.$$
$$\text{III)} \quad W_2 \equiv U_3 - U_1 \text{ (Punkt } B\text{)}.$$
$$\text{IV)} \quad W_3 \equiv U_1 - U_2 \text{ (Punkt } C\text{)}.$$

Ganz ebenso bildet man:

$$\text{V)} \quad W_1 \equiv V_2 - V_3 \text{ (Punkt } A_1\text{)}.$$
$$\text{VI)} \quad W_2 \equiv V_3 - V_1 \text{ (Punkt } B_1\text{)}.$$
$$\text{VII)} \quad W_3 \equiv V_1 - V_2 \text{ (Punkt } C_1\text{)}.$$

Aus II, III, IV, V, VI, VII leitet man sofort ab:

$$U_1 - V_1 \equiv U_2 - V_2 \equiv U_3 - V_3,$$

und wenn der gemeinsame Werth dieser Symbole mit T bezeichnet wird, so folgt:

VIII) $T \equiv U_1 - V_1$ (Punkt E).
IX) $T \equiv U_2 - V_2$ (Punkt F).
X) $T \equiv U_3 - V_3$ (Punkt G).

Aus den drei letzten Identitäten geht nun sofort hervor, dass die Linie $T = 0$ sowohl durch E, als auch durch F, als auch durch G hindurchgeht. Also liegen diese drei Punkte auf einer geraden Linie q. e. d.

Der eben bewiesene Satz kann auch umgekehrt werden, dass nämlich zwei Dreiecke perspektivisch liegen, wenn die drei Schnittpunkte entsprechender Seitenpaare in gerader Linie liegen. Der Beweis würde genau so zurückgehen, wie wir hier vorwärts gegangen sind.

Bemerkungen: 1. Der hier gegebene Beweis ist so einfach und doch wieder so tief durchdacht (er rührt von Hesse her), dass er zuerst einen fremdartigen Eindruck machen kann. Es sind hier 10 lineare Ausdrücke eingeführt worden:

$$U_1,\ U_2,\ U_3,\ V_1,\ V_2,\ V_3,\ W_1,\ W_2,\ W_3,\ T,$$

die aber nicht alle willkürlich sind, sondern den zehn Identitäten I bis X genügen müssen. Letztere sind indessen auch zum Theil von einander abhängig, und man sieht leicht, dass vier der obigen Ausdrücke, z. B. U_1, U_2, U_3 und T beliebig gewählt werden können, während die anderen durch sie folgendermaassen bestimmt sind:

$$V_1 \equiv U_1 + T,\quad V_2 \equiv U_2 + T,\quad V_3 \equiv U_3 + T,$$
$$W_1 \equiv U_2 - U_3,\ W_2 \equiv U_3 - U_1,\ W_3 \equiv U_1 - U_2.$$

Setzt man diese 10 Ausdrücke der Reihe nach in die Gleichungen I bis X ein, so werden sie identisch (d. h. für jeden Werth von x und y) erfüllt, und setzt man andererseits diese Ausdrücke $= 0$, so werden die Gleichungen der Linien der Figur gebildet.

2. Diese Figur zeigt eine sehr merkwürdige Symmetrie. Es sind in ihr 10 Linien U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3, W_1, W_2, W_3, T und ebenfalls 10 Punkte A, B, C, A_1, B_1, C_1, D, E, F, G namhaft gemacht worden und man bemerke, wie durch jeden Punkt drei Gerade gehen und umgekehrt auf jeder Geraden drei Punkte liegen. Ueberhaupt können in der Figur 10 Paare von perspektivisch liegenden Dreiecken aufgezählt werden, die man alle erhält, wenn der Reihe nach jeder der 10 Punkte

als Centrum der Perspektivität angenommen wird. Mag sie der Leser zur Uebung selbst aufsuchen.

Daraus folgt, dass es eine noch symmetrischere analytische Darstellung der Figur geben muss, als in den Formeln I—X, und in der That ist eine solche leicht genug zu finden. Man nehme hierzu irgend welche fünf lineare Ausdrücke

$$R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$$

und bilde alle möglichen Differenzen zwischen ihnen, also $R_1 - R_2$, $R_1 - R_3 \dots$ u. s. w. Es giebt deren, vom Vorzeichen abgesehen, 10 Stück. Diese Ausdrücke können dann — auch vom Vorzeichen abgesehen — für unsere U_1, $U_2 \dots$ etc. genommen werden.

3. Aber auch in anderer Weise ist die Symmetrie der Figur ersichtlich. Man kann sie als eine perspektivische Projektion von irgend 5 im Raume beliebig liegenden Ebenen ansehen, mit ihren 10 Schnittgeraden, in denen je zwei und ihren 10 Schnittpunkten, in denen je drei dieser Ebenen sich schneiden. So vorgestellt ist das vorliegende Netz noch einfach genug, um vom Auge entwirrt zu werden; wenn aber, wie in manchen Untersuchungen der reinen Geometrie, noch viel mehr Gerade und Punkte in's Spiel kommen, so ist derjenige, welcher auf sein Anschauungsvermögen vertraut, rettungslos verloren;[1]) er muss die Symmetrie, den ebenmässigen Bau der Figur in die Gleichungen und Formeln hineinlegen, wenn nicht etwa ein geometrisches Gewand vorgezogen wird, das aber, weil die Anschauungskraft nicht ausreicht, als eine Umschreibung der Formeln anzusehen ist. Nur so können auch solche geometrische Gebilde in allen ihren Tiefen erforscht werden, welche der Blick nicht mehr umfassen kann.

Aufgabe. Gegeben die Gleichungen dreier Geraden:

$$U_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$U_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$
$$U_3 \equiv a_3 x + b_3 y + c_3 = 0.$$

Welche Bedingung muss zwischen den 9 Coefficienten stattfinden, damit die Geraden durch einen Punkt gehen?

---

[1]) Ein klassisches Beispiel hierzu bilden die tiefer gehenden Forschungen über die Eigenschaften des Pascal'schen Sechseckes, in denen hunderte von Punkten und Linien in Betracht kommen.

Erste Lösung: Der direkteste Weg ist offenbar der, dass man den Durchschnittspunkt zweier Geraden, z. B. der ersten und zweiten berechnet:

$$x = \frac{-c_1 b_2 + b_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}, \quad y = \frac{-a_1 c_2 + c_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$$

und seine Koordinaten in die dritte Gleichung einsetzt. Es folgt, nach Entfernung des Nenners

$$a_3(-c_1 b_2 + b_1 c_2) + b_3(-a_1 c_2 + c_1 a_2) + c_3(a_1 b_2 - b_1 a_2) = 0$$

als die gesuchte Bedingung.

Zweite Lösung: Wenn die Geraden durch einen Punkt gehen, so muss eine Identität von der Form:

$$U_1 \equiv \lambda U_2 + \mu U_3$$

stattfinden. Nach Einsetzen der Ausdrücke für U_1, U_2, U_3 löst sich dieselbe in die drei Gleichungen auf:

$$a_1 = \lambda a_2 + \mu a_3$$
$$b_1 = \lambda b_2 + \mu b_3$$
$$c_1 = \lambda c_2 + \mu c_3.$$

Eliminirt man hier λ und μ, indem etwa λ und μ aus den ersten beiden Gleichungen berechnet und in die dritte eingesetzt werden, so wird zuletzt dieselbe Endgleichung erhalten wie vorher.

Diese Endgleichung lautet vollständig entwickelt:

$$a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 = 0.$$

Die linke Seite zeigt ein eigenartiges Bildungsgesetz. Jedes Glied ist das Produkt von drei Coefficienten; es werden aber niemals, wie man sieht, zwei Coefficienten derselben Gleichung und auch niemals zwei Coefficienten von gleicher Bedeutung (als Coefficient von x, von y und Constante) mit einander multiplicirt. Oder auch so: Stellt man die neun Coefficienten, so wie sie in den Gleichungen stehen, aber mit Weglassung von x und y zu einem Quadrat zusammen

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{matrix}$$

so werden nur solche Coefficienten multiplicirt, die in verschiedenen Vertikal- und zugleich in verschiedenen Horizontalreihen stehen.

Das erste Glied ist das sogenannte „Diagonalglied" von links oben nach rechts unten:

$$a_1 \cdot b_2 \cdot c_3$$

und alle andern entstehen aus ihm durch Permutation der Indices 1, 2, 3 (oder auch der Buchstaben a, b, c). So können sofort alle 6 Glieder aufgeschrieben werden und das Vorzeichen wird nach der Regel gefunden, dass das genannte Diagonalglied und die aus ihm durch cyclische Vertauschung von 1, 2, 3 entstehenden, positive, die drei andern negative Zeichen haben.

Der so gebildete Ausdruck ist eine Determinante dritten Grades:

$$D = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} \qquad 2)$$

die augenscheinlich als eine Erweiterung der früher genannten Determinanten zweiten Grades

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}$$

angesehen werden kann und wohl zweifelsohne ihrerseits die Aufstellung von Determinanten nach höheren, vierten, fünften u. s. w. Grades nahe legt, wie in § 18 näher erläutert.

Die Einführung des Begriffes einer Determinante erlaubt nun die folgende kurze, treffende Bezeichnung der Lösung der gestellten Aufgabe:

Man setze die Determinante aus den neun Coefficienten der drei Gleichungen $= 0$.

Aufgabe: Gegeben die Gleichungen von vier Strahlen eines Strahlenbüschels:

$$U_1 + \lambda_1 U_2 = 0,\; U_1 + \lambda_2 U_2 = 0,\; U_1 + \lambda_3 U_2 = 0,\; U_1 + \lambda_4 U_2 = 0$$

wo:

$$U_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1$$
$$U_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2.$$

Gesucht das Doppelverhältniss der vier Strahlen.

Lösung: Man schneide das Strahlenbüschel durch die x-Achse, setze also überall $y = 0$. (Sollte das Centrum auf der x-Achse selbst liegen, so nehme man eine Parallele zur x-Achse oder auch irgend eine andere Gerade.) Dann wird die Abscisse x für den Strahl λ durch die Gleichung erhalten:

$$(a_1 x + c_1) + \lambda (a_2 x + c_2) = 0,$$

aus welcher folgt:

$$x = -\frac{c_1 + \lambda c_2}{a_1 + \lambda a_2}$$

x ist also eine lineare Funktion von λ. Daher ist nach § 1 das Doppelverhältniss der vier Schnittpunkte, also auch der vier Strahlen:

$$D = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}. \qquad \mathbf{3)}$$

Man sieht also, dass die Coefficienten von U_1 und U_2 gar nicht in Betracht kommen, sondern nur die 4 Werthe des Parameters λ und dass der Ausdruck für das Doppelverhältniss die uns von früher so wohlbekannte Form erhält.

Setzt man z. B. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \infty$, lässt also den ersten Strahl mit $U_1 = 0$, und zweiten mit $U_2 = 0$ zusammenfallen, so reducirt sich das Doppelverhältniss auf den Bruch $\frac{\lambda_3}{\lambda_4}$. Soll es $= -1$ werden, so muss $\lambda_3 = -\lambda_4$ sein, d. h.:

Sind $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ irgend zwei Gerade, so stellen sie mit $U_1 - \lambda U_2 = 0$, $U_1 + \lambda U_2 = 0$ zusammen vier harmonische Strahlen vor.

Aufgaben.

1. Gegeben das Strahlenbüschel:

$$(2 + 3\lambda)x - (4 - 7\lambda)y + \lambda = 0.$$

Es ist die Gleichung des Strahles dieses Büschels zu ermitteln, der von $P(+1, +1)$ den Abstand 1 besitzt.

2. Gegeben die beiden Strahlenbüschel:

$$(2 + 3\lambda)x - (4 - 7\lambda)y + \lambda = 0$$

und

$$(3 - 2\mu)x + (4 - 7\mu)y + 5 = 0.$$

Es soll der ihnen gemeinsame Strahl gefunden werden.

3. Es seien

$$U_1 = 0,\ U_2 = 0,\ U_3 = 0,\ U_4 = 0$$

die Gleichungen der vier Seiten eines vollständigen Vierseits. Zwischen U_1, U_2, U_3, U_4 findet stets eine Identität von der Form

$$a_1 U_1 + a_2 U_2 + a_3 U_3 + a_4 U_4 \equiv 0$$

statt. Es sind die Gleichungen der Seiten des Diagonaldreiecks ohne weiteres nieder zu schreiben, wenn a_1, a_2, a_3, a_4 als bekannt vorausgesetzt werden.

§ 11.

Die Koordinaten u und v der geraden Linie. Tangentengleichungen von Kurven.

Um das schon so oft angezogene Prinzip der Dualität oder Reciprocität auch analytisch zum Ausdruck zu bringen, muss man folgerichtig auch für die gerade Linie „Koordinaten" einführen. Koordinate heisst wörtlich Zugeordnete, d. h. zugeordnete Grösse, und wie x und y dem Punkte zugeordnet werden, um seine Lage zu bestimmen, so können auch der geraden Linie solche Grössen zugeordnet werden, die zur Feststellung ihrer Lage ausreichen. Am nächsten liegen hier die beiden Stücke p und q, welche sie von den Achsen abschneidet. Indessen hat man vorgezogen, nicht diese Stücke selbst, sondern ihre negativen reciproken Werthe, also:

$$u = -\frac{1}{p}, \quad v = -\frac{1}{q} \qquad \textbf{4)}$$

zu Koordinaten der geraden Linie zu stempeln und zwar, weil erstens in der speciellen Form 1a) § 9:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0$$

p und q im Nenner auftreten und weil zweitens bei Einführung der negativen Werthe nun die Glieder der Gleichung sämmtlich dasselbe Zeichen erhalten.

Nach Einführung von u und v wird nämlich diese Gleichung:

$$ux + vy + 1 = 0. \qquad \textbf{5)}$$

Man kann gegen diese Wahl von u und v als Koordinaten einwerfen, dass sie beide unendlich gross werden, wenn die Linie durch den Anfangspunkt geht. Dieser Uebelstand muss aber mit in Kauf genommen werden, zumal er ja auch für p und q selbst in anderer Art lästig fallen würde, da z. B. $p = \infty$, wenn die Linie parallel zur y-Achse.

Nach 2) § 9 ist der Richtungscoefficient der geraden Linie:

$$m = -\frac{q}{p} = \operatorname{tg} \varphi,$$

$$m = -\frac{u}{v}. \qquad \textbf{6)}$$

Wenn die Gerade durch O geht, so werden u und v unendlich gross, m aber im allgemeinen nicht, folglich wird

man in diesem Falle nicht u und v selbst geben, weil sie eben unendlich sind, wohl aber ihr Verhältniss $\frac{u}{v}$, welches sofort nach 6) den Richtungscoefficienten bestimmt. [Genau so, wie man für einen unendlich fernen Punkt weder x noch y angeben kann, aber doch $\frac{y}{x}$, d. h. die Richtung in welcher er liegt.] Im übrigen ist sehr wohl zu beachten, dass die unendlich ferne Gerade die Koordinaten hat $u = 0$, $v = 0$.

Nach Einführung der Liniencoordinaten erhält die Gleichung

$$ux + vy + 1 = 0 \qquad \textbf{5)}$$

noch eine ganz andere Bedeutung. Bisher sind in derselben x und y als „Veränderliche" angesehen worden, während u und v als constant galten. Dann war 5) die Gleichung einer Geraden, nämlich derjenigen Geraden, die von den Achsen nach 4) die Stücke:

$$p = -\frac{1}{u}, \quad q = -\frac{1}{v}$$

abschneidet. Wie aber, wenn in 5) umgekehrt x und y als gegeben, dagegen u und v als veränderlich angesehen werden? Dann stellt sie die Bedingung vor, dass die Linie (u, v) durch den gegebenen Punkt $P(x,y)$ gehe. Sie wird zum analytischen Ausdruck des Strahlenbüschels, oder noch einfacher, sie wird zum analytischen Ausdruck eines Punktes, nämlich des Centrums dieses Strahlenbüschels. In diesem Sinne ist die Gleichung 5) jetzt die Gleichung eines Punktes.

Allgemein ist jede Gleichung ersten Grades in u und v:

$$au + bv + c = 0 \qquad \textbf{5a)}$$

die Gleichung eines Punktes. Denn nach der Division durch c erlangt sie wieder die Form:

$$\frac{a}{c}u + \frac{b}{c}v + 1 = 0, \text{ oder } xu + yv + 1 = 0$$

wenn $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ gesetzt wird. Diese Werthe von x und y sind demnach die Punktkoordinaten des durch Gleichung 5a) dargestellten Punktes.

So hat die Gleichung 5) je nach der Auffassung der in ihr vorkommenden Punktkoordinaten xy und Linienkoordinaten uv eine andere Bedeutung. Sieht man die ersteren als ver-

änderlich, die letztere als constant an, so ist 5) die Gleichung einer Geraden. Sind aber die letzteren veränderlich, so wird 5) die Gleichung eines Punktes. Sieht man aber sowohl u und v, als auch x und y als veränderlich an, so bezeichnet 5) die Bedingung, dass der Punkt $P(x,y)$ auf der Geraden $l(u,v)$ liegt.

In Punktkoordinaten hat die gerade Linie eine Gleichung und zwar ersten Grades, in Linienkoordinaten dagegen hat sie überhaupt keine Gleichung, sondern eben nur Koordinaten (u, v). Und reciprok: Der Punkt hat in Linienkoordinaten eine Gleichung ersten Grades, in Punktkoordinaten aber nicht, sondern nur die Koordinaten x und y. Je nachdem also in einer Gleichung ersten Grades die Veränderlichen Punktkoordinaten oder Linienkoordinaten sind, ist sie als Gleichung einer geraden Linie (eigentlich einer Punktreihe) oder eines Punktes (eigentlich eines Strahlenbüschels) zu nehmen.

Aufgabe: Gegeben zwei Gerade durch ihre Koordinaten $l_1(u_1, v_1)$, $l_2(u_2, v_2)$, gesucht Ausdrücke für die Koordinaten irgend einer dritten durch den Schnittpunkt beider gehenden Geraden l.

Lösung. Die Gleichungen von l_1 und l_2 sind:

$$u_1x + v_1y + 1 = 0$$
$$u_2x + v_2y + 1 = 0$$

und da l durch den Schnittpunkt gehen soll, so muss ihre Gleichung eine lineare Verbindung, oder von der Form sein:

$$(u_1x + v_1y + 1) - \lambda(u_2x + v_2y + 1) = 0$$

oder:

$$x(u_1 - \lambda u_2) + y(v_1 - \lambda v_2) + (1 - \lambda) = 0$$

oder auch:

$$\frac{u_1 - \lambda u_2}{1 - \lambda}x + \frac{v_1 - \lambda v_2}{1 - \lambda}y + 1 = 0.$$

Da die Constante hier $= 1$ ist, so muss sie mit der Gleichung

$$ux + vy + 1 = 0$$

identisch sein, wenn u und v die Koordinaten von l sind. Also:

$$u = \frac{u_1 - \lambda u_2}{1 - \lambda}$$
$$v = \frac{v_1 - \lambda v_2}{1 - \lambda} \qquad 6)$$

Die Vergleichung dieser Formeln mit den Formeln 3) § 5

giebt völlige Uebereinstimmung, nur dass es sich hier um Linien u, v; dort um Punkte x, y gehandelt hat. Dort besass λ eine sehr einfache Bedeutung als Verhältniss von P zu P_1 und P_2; suchen wir also auch hier die entsprechende Bedeutung von λ zu ergründen. Nimmt man hierzu für λ irgend vier Werthe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ an, so folgt aus der Formel 3) § 10 dass das Doppelverhältniss der vier durch diese Werthe von λ bestimmten Strahlen:

$$D = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}.$$

Nun setze man für $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \infty$, dann fällt nach 6) der erste Strahl mit l_1, der zweite mit l_2 zusammen und es wird:

$$D = \frac{\lambda_3}{\lambda_4}. \qquad 7)$$

Lässt man den vierten Strahl durch den Anfangspunkt gehen, so muss $\lambda_4 = 1$ werden, da dann aus 6) $u = \infty$, $v = \infty$ folgen muss. Das Doppelverhältniss wird einfach $= \lambda_3$ oder auch $= \lambda$, wenn der dritte Strahl wieder als laufender Strahl angesehen wird. Daher:

In den Formeln 6) ist $\lambda =$ dem Doppelverhältniss des Strahles l und des durch den Anfangspunkt gehenden Strahles zu den Strahlen l_1 und l_2.

Diese Deutung von λ entspricht vollständig der früheren Deutung von λ in den Formeln 3) § 5, wenn statt des durch den Anfangspunkt gehenden Strahls der unendlich ferne Punkt der Punktreihe $P_1 P_2 P_3$ genommen wird, da nach § 1 das einfache Verhältniss zwischen drei Punkten als Doppelverhältniss zwischen vier Punkten angesehen werden kann, wenn der vierte Punkt unendlich fern liegt.

Transformation der Linienkoordinaten. Selbstverständlich hängen die Linienkoordinaten ebenso von dem Koordinatensystem ab, wie die Punktkoordinaten. Wie letztere durch Transformationsformeln in einander übergeführt werden, ist in § 4 gezeigt worden und von diesen Formeln ausgehend kann man die entsprechende Transformation von u und v folgendermaassen ableiten.

Es sei u, v irgend eine Linie, also:

$$ux + vy + 1 = 0$$

ihre Gleichung. Die Transformationsformeln

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi + a$$
$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi + b$$

des § 4 (bei der Beschränkung auf rechtwinklige Koordinaten) verwandeln diese Gleichung in:

$$u(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi + a) + v(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi + b) + 1 = 0$$

oder in

$$x'(u \cos \varphi + v \sin \varphi) + y'(-u \sin \varphi + v \cos \varphi) + (au + bv + 1) = 0$$

und endlich nach Division mit $au + by + 1$ in:

$$\frac{u \cos \varphi + v \sin \varphi}{au + bv + 1} x' + \frac{-u \sin \varphi + v \cos \varphi}{au + bv + 1} y' + 1 = 0.$$

Diese Gleichung muss aber, da die Constante $= 1$, mit der Gleichung

$$u'x' + v'y' + 1 = 0$$

zusammenfallen, wo u' und v' die neuen Koordinaten der Linie sind. Folglich:

$$u' = \frac{u \cos \varphi + v \sin \varphi}{au + bv + 1}, \quad v' = \frac{-u \sin \varphi + v \cos \varphi}{au + bv + 1}, \qquad 8)$$

womit die gesuchten Transformationsformeln gefunden sind. Man sieht, dass sie auch linear, aber gebrochen linear ausfallen und zwar, was sehr wesentlich ist, als Brüche mit gleichem Nenner.

Wird der Anfangspunkt beibehalten, so ist $a = 0$, $b = 0$ und die Formeln vereinfachen sich in:

$$u' = u \cos \varphi + v \sin \varphi, \quad v' = -u \sin \varphi + v \cos \varphi. \qquad 8a)$$

Werden aber die Achsenrichtungen beibehalten, so ist $\varphi = 0$ und daher:

$$u' = \frac{u}{au + bv + 1}, \quad v' = \frac{v}{au + bv + 1}. \qquad 8b)$$

Vorhin wurde gezeigt, dass eine Gleichung ersten Grades in u und v

$$au + bv + 1 = 0$$

einen Punkt oder vielmehr ein Strahlenbüschel bedeutet. Was hat man sich aber unter einer beliebigen Gleichung zwischen u und v

$$F(u, v) = 0$$

also z. B. unter einer quadratischen Gleichung

$$au^2 + buv + cv^2 + du + ev + f = 0$$

vorzustellen?

Die Antwort ergiebt sich wohl von selbst.

Diese Gleichung ist die analytische Darstellung der Gesammtheit aller der Geraden, deren Koordinaten diese Gleichung erfüllen. Wie aber kann wohl diese Gesammtheit beschaffen sein?

Im allgemeinen stellt eine Gleichung $\varphi\ (xy) = 0$ in Punktkoordinaten eine stetige oder continuirliche Folge von Punkten dar, und dem entspricht hier eine stetige oder continuirliche Folge von geraden Linien, derart, dass ein ganz allmälicher Uebergang von einer Lage zu einer anderen stattfindet. Man muss sich irgend eine gerade, unbegrenzt lange Linie in Bewegung vorstellen, um in dieser Bewegung das Analogon zu dem continuirlichen Zuge einer Kurve zu besitzen.

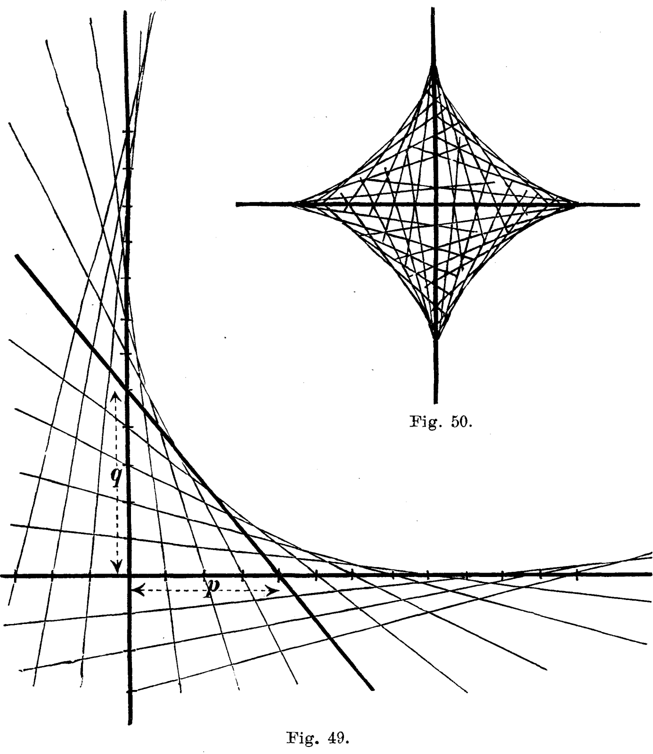


Fig. 50.

Fig. 49.

Wie aber die Figuren 49) und 50) anschaulich darstellen, beschreibt eine solche Linie auch eine Kurve, freilich in ganz anderer Weise, wie ein Punkt, nämlich so, dass die Kurve

von ihr berührt wird,[1]) wie auch umgekehrt die Tangente an eine Kurve in irgend einem Punkte mit diesem Punkte continuirlich ihre Lage ändert. Daher:

Eine Gleichung von der Form $F(u, v) = 0$ stellt im allgemeinen die sogenannte Tangentengleichung einer Kurve vor, d. h. sie wird erfüllt, wenn für u und v die Koordinaten irgend einer Tangente der Kurve gesetzt werden.

Demnach hat jede Kurve bei nachträglicher Einführung der Linienkoordinaten zwei durchaus verschiedene Gleichungen, eine Gleichung in Punktkoordinaten x, y, welche für jeden Punkt der Kurve gilt und eine Gleichung in Linienkoordinaten u, v, welche für jede Tangente der Kurve gilt. So stehen sich hier Kurvenpunkt und Kurventangente dualistisch gegenüber. Man kann aber die Reciprocität zwischen ihnen noch weiter verfolgen. Die Verbindungssekante zweier Punkte der Kurve entspricht dem Schnittpunkt zweier Tangenten, und wie jene Sekante bei unbegrenzter Annäherung der beiden Kurvenpunkte in die Tangente übergeht, so wird aus dem Schnittpunkt der Tangenten zuletzt der Berührungspunkt. Oder bei kurzer Ausdrucksweise: Wie die Tangente durch zwei unendlich nahe Punkte der Kurve geht, so schneiden sich zwei unendlich nahe Tangenten in einem Punkt der Kurve, dem Berührungspunkt. Ferner entspricht einem Doppelpunkte, d. h. einem Punkte, durch welchen die Kurve zweimal hindurchgeht, die Doppeltangente, d. h. eine gerade Linie, welche die Kurve zweimal (in zwei verschiedenen Punkten) berührt u. s. w.

Genug, man sieht auch hier die Reciprocität zwischen Punkt und gerader Linie in vollendeter Gestalt. Sie wird in späteren Paragraphen für die Kegelschnitte bis zum Ende durchgeführt werden, wo sie alsdann die so wohlbekannte, schöne Theorie von Pol und Polare zeitigt; hier indessen mag dieses Kapitel mit noch einigen allgemeinen Bemerkungen über Gleichungen in Linienkoordinaten geschlossen werden.

---

[1]) Man beachte wohl, dass in Fig. 49 und 50 nur gerade Linien gezeichnet sind und wie trotzdem die von ihnen berührte (eingehüllte) Kurve vollkommen deutlich herauskommt.

Gesetzt, es sei die Gleichung einer Kurve in Punktkoordinaten:

$$\text{a)} \qquad \varphi(x, y) = 0$$

gegeben. Wie eben erläutert, muss diese Kurve auch eine Gleichung in Linienkoordinaten haben, und es fragt sich, wie die letztere gefunden werden kann. Der Ansatz zur Lösung ist leicht zu finden. Man schneide die Kurve durch eine Gerade

$$ux + vy + 1 = 0$$

und stelle die Bedingung auf, welche zwischen den Coefficienten u und v stattfinden muss, damit zwei dieser Punkte zusammenfallen. Da aber u und v nichts anderes sind, als die Koordinaten der angenommenen Geraden, so ist die gefundene Bedingung mit der gesuchten Gleichung in Linienkoordinaten identisch.

Beispiel: Die Kurve sei der Kreis mit der Gleichung:

$$\text{a)} \qquad x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Man schneide ihn durch die Gerade:

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Aus der letzten Gleichung folgt $y = -\frac{1 + ux}{v}$ und in die erstere eingesetzt:

$$x^2 + \left(\frac{1 + ux}{v}\right)^2 - r^2 = 0$$

oder

$$x^2(u^2 + v^2) + 2xu + 1 - r^2v^2 = 0.$$

Wenn die Gerade Tangente sein soll, müssen die Abscissen der beiden Schnittpunkte zusammenfallen. Dies giebt aber die Bedingung:

$$(u^2 + v^2)(1 - r^2v^2) - u^2 = 0$$

oder

$$u^2 + v^2 - r^2u^2v^2 - r^2v^4 - u^2 = 0$$

und endlich

$$v^2(1 - r^2(u^2 + v^2)) = 0.$$

Der erste Faktor v^2 muss fortgelassen werden, denn $v = 0$ sagt aus, dass die Gerade parallel zur y-Achse sei, und dann sind die Abscissen der Schnittpunkte offenbar stets einander gleich, ob nun die Gerade Tangente ist oder nicht. Bleibt also nur

$$\text{b)} \qquad 1 - r^2(u^2 + v^2) = 0$$

als Gleichung des Kreises in Linienkoordinaten.

Ist umgekehrt die Gleichung einer Kurve in Linienkoordinaten gegeben:

$$F(u, v) = 0, \qquad \text{b)}$$

so stelle man sie mit der Gleichung eines Strahlenbüschels:

$$ux + vy + 1 = 0$$

zusammen, d. h. man betrachte alle durch den Punkt $P(x, y)$ gehenden Tangenten der Kurve. Dieser Punkt wird Berührungspunkt, wenn zwei dieser Tangenten zusammenfallen. Also muss die Bedingung für dieses Zusammenfallen aufgesucht werden, wenn man die Gleichung derselben Kurve in Punktkoordinaten erhalten will.

Beispiel: Eine Gerade l bewegt sich so, dass die Summe der Abschnitte von den Achsen konstant $= a$ ist. Welche Kurve berührt sie dabei. (Fig. 49.)

Lösung: Es soll sein

$$p + q = a$$

oder

$$-\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = a$$

$$u + v + auv = 0. \qquad \text{b)}$$

Dies ist die Gleichung der Kurve in Linienkoordinaten. Man nehme nun zunächst einen beliebigen Punkt mit den Koordinaten x und y, also mit der Gleichung

$$ux + vy + 1 = 0$$

und suche die durch P gehenden Tangenten. Es folgt:

$$u = -\frac{vy + 1}{x}$$

und dies in die Gleichung der Kurve eingesetzt:

$$-\frac{vy + 1}{x} + v - a\,\frac{vy + 1}{x}\,v = 0$$

oder

$$v^2 ay + v\,(a + y - x) + 1 = 0.$$

Diese Gleichung für v hat zwei gleiche Wurzeln, wenn:

$$(a + y - x)^2 - 4ay = 0$$

oder

$$(y - x)^2 - 2a\,(y + x) + a^2 = 0. \qquad \text{a)}$$

Dies ist die gesuchte Gleichung in Punktkoordinaten. Nach späteren Untersuchungen (§ 16) stellt sie eine Parabel vor, welche die x- und y-Achse in den beiden Punkten berührt, die vom Anfangspunkt den Abstand a haben. (p oder

q kann auch negativ werden, dann verwandelt sich die Summe $p + q$ in eine Differenz.)

In beiden Beispielen hatten die Gleichung in Punktkoordinaten und die Gleichung in Linienkoordinaten denselben, nämlich den zweiten Grad. Dass aber im allgemeinen beide Grade nicht übereinstimmen, dafür liefert die gerade Linie selbst den Beweis. Denn in Punktkoordinaten hat sie eine Gleichung ersten Grades, in Linienkoordinaten aber überhaupt keine Gleichung, sondern nur zwei Koordinaten. Und umgekehrt verhält es sich mit dem Punkt. Darum ist man übereingekommen, den Grad der Gleichung einer Kurve in Punktkoordinaten seine Ordnung, in Linienkoordinaten aber seine Klasse zu nennen, sodass eine gerade Linie von der ersten Ordnung und null^{ten} Klasse, ein Punkt von der null^{ten} Ordnung und ersten Klasse, aber, wie die Beispiele zeigen, eine Kurve zweiter Qrdnung auch von der zweiten Klasse ist. [Die Kurve Fig. 50), welche entsteht, wenn eine Linie von gegebener Länge zwischen den Koordinatenachsen gleitet, ist von der vierten Klasse und von der sechsten Ordnung.]

Stellt man zwei Gleichungen in Linienkoordinaten

$$F(u, v) = 0, \ \varphi(u, v) = 0$$

zusammen und löst sie nach u und v als Unbekannten auf, so werden offenbar die gemeinsamen Tangenten der beiden Kurven bestimmt. Ist die erste Kurve von der m^{ten}, die zweite von der n^{ten} Klasse, so wird nach § 8 die Zahl dieser Tangenten $= m \cdot n$. Setzt man im besondern $m = 1$, so folgt:

An eine Kurve n^{ter} Klasse lassen sich von jedem Punkt der Ebene n (reelle oder imaginäre) Tangenten ziehen.

Dieser Satz ist das völlige Analogon zu dem Satz in § 8, dass eine Kurve n^{ter} Ordnung von einer Geraden in n Punkten geschnitten wird.

Aufgaben.

1. Eine Gerade bewegt sich so, dass sie von den Koordinatenachsen ein Dreieck von gegebenem Inhalt $= \Delta$ abschneidet. Die von ihr eingehüllte Kurve ist zu ermitteln a) durch ihre Tangentengleichung, die dann b) in ihre Punktgleichung umzuwandeln ist.

2. Dieselbe Aufgabe wie 1), nur dass nicht der Inhalt, sondern der Umfang konstant $= 2s$ sein soll.

3. Gegeben die Kurve zweiter Klasse:

$$u^2 - v^2 + 2u - 2v + 1 = 0.$$

Das Koordinatensystem wird parallel verschoben, so dass der Anfangspunkt mit dem Punkte zusammenfällt, der jetzt die Koordinaten $(+2, +3)$ hat. Wie lautet dann die Gleichung, wenn die transformirten Koordinaten u' und v' genannt werden.

Dritter Abschnitt.

§ 12—18.

§ 12.

Der Kreis. Kreis und Punkt. Kreis und Gerade. Zwei Kreise. Kreisbüschel. Kreisbündel.

Die schon wiederholt benutzte Mittelpunktsgleichung des Kreises mit dem Radius r lautet:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

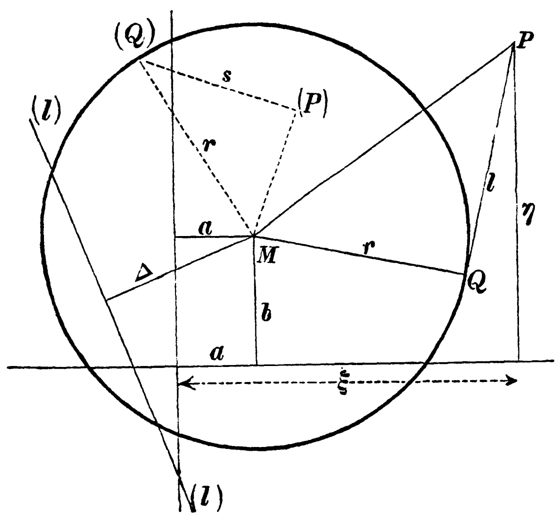


Fig. 51.

Hat der Mittelpunkt aber die Koordinaten a und b (Fig. 51), so sind hier statt x und y zu setzen $x - a$, und $y - b$, d. h. die relativen Koordinaten in Bezug auf den Mittelpunkt, so dass die allgemeinste Gleichung des Kreises die Gestalt hat:

$$U \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0 \qquad \textbf{1)}$$

wo wieder die linke Seite der Einfachheit wegen mit U bezeichnet worden ist.

Wird ausquadrirt, so wandelt sich U in:

$$U \equiv x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \qquad \textbf{2)}$$

und man findet:

$$m = -2a$$
$$n = -2b \qquad 3)$$
$$p = a^2 + b^2 - r^2.$$

In dieser Form hat die Kreisgleichung 5 Glieder. Sie ist zwar vom zweiten Grade, aber durchaus nicht die allgemeinste Gleichung zweiten Grades, welche man bilden könnte. Denn erstens fehlt das Glied mit xy, und zweitens sind die Coefficienten von x^2 und y^2 einander gleich. (Dass sie beide $= 1$ sind, ist dabei nebensächlich, denn man kann sie durch Multiplikation der Gleichung mit irgend einer Zahl so gross oder so klein machen wie man will.)

Aber auch umgekehrt:

Wenn in einer Gleichung zweiten Grades das Glied mit xy fehlt (den Coefficienten 0 hat), wenn ausserdem der Coefficient von x^2 = dem Coefficienten von y^2 ist, wenn sie also die Form besitzt:

$$\lambda x^2 + \lambda y^2 + Mx + Ny + P = 0$$

so stellt sie einen Kreis vor.

Man dividire zunächst durch λ und setze:

$$\frac{M}{\lambda} = m, \ \frac{N}{\lambda} = n, \ \frac{P}{\lambda} = p, \text{ so folgt die Form 2)}$$

$$x^2 + y^2 + nx + ny + p = 0.$$

Die Wiederherstellung der Form 1) vermitteln nun die Gleichungen 3), welche durch Auflösung die Koordinaten a und b des Mittelpunktes und den Radius r ergeben:

$$a = -\frac{m}{2}, \ b = -\frac{n}{2}, \ r = \sqrt{a^2 + b^2 - p} = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p}. \qquad 4)$$

Bemerkungen: 1. Wenn $\lambda = 0$, so werden m, n und p, also auch a, b und r unendlich gross, daher kann jede gerade Linie als ein Kreis mit unendlich grossem Radius und unendlich fernem Mittelpunkt angesehen werden, wie überhaupt eine Kurve niederer Ordnung als specieller Fall, als eine Abart einer Kurve höherer Ordnung erscheint, wenn in der entsprechenden Gleichung die Coefficienten der höheren Glieder $= 0$ sind.

2. r ist in 4) durch eine Quadratwurzel gegeben. Wenn also der Radikand negativ ist, so wird r und damit der Kreis selbst imaginär. Ist aber dieser Radikand zufällig $= 0$, und somit auch $r = 0$, so schrumpft der Kreis in seinen Mittelpunkt ein. In der That geht dann die Gleichung über in:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=0,$$

welche, wenn reelle Werthe verlangt werden, nur für $x=a$, $y=b$ befriedigt wird.

3. Bei Zulassung des Imaginären zerfällt indessen diese Gleichung in zwei Gleichungen, da

$$(y-b)^2+(x-a)^2=[(y-b)-i\,(x-a)]\,[(y-b)+i\,(x-a)],$$

also entweder

$$(y-b)-i\,(x-a)=0$$

oder

$$(y-b)+i\,(x-a)=0.$$

Dies sind zwei imaginäre, aber durch den reellen Mittelpunkt (ab) gehende gerade Linien und zwar Nulllinien, da sie die Richtungsconstanten $=+i$ und $=-i$ haben.

Gesetzt z. B. es liege die Gleichung vor:

$$x^2+y^2-6x+8y-11=0.$$

Sie stellt einen Kreis dar, da das Glied mit xy fehlt und die Coefficienten von x^2 und y^2 einander gleich sind. Um sie sofort in die Form 1) zu bringen, füge man zu x^2-6x und zu y^2+8y die quadratischen Ergänzungen 9 und 16 hinzu und ziehe ihre Summe wieder ab, so folgt:

$$(x-3)^2+(y+4)^2-36=0$$

und es ist

$$a=+3,\ b=-4,\ r=\sqrt{36}=6.$$

Wäre das constante Glied $+25$ statt -11 gewesen, so hätte r den Werth 0 erhalten. Also stellt die Gleichung

$$x^2+y^2-6x+8y+25=0$$

einen unendlich kleinen Kreis vor.

Wäre aber die Constante noch grösser, etwa $=+29$ gewesen, so würde die Gleichung sich in

$$(x-3)^2+(y+4)^2+4=0$$

verwandelt haben und r würde $=\sqrt{-4}=2i$ geworden sein. In der That lehrt der Augenschein, dass die letztere Gleichung überhaupt nicht für ein reelles Werthepaar (xy) erfüllt werden kann, da das letzte Glied der linken Seite positiv $=+4$ und die beiden andern auch positiv sind oder höchstens $=0$ werden können.

Aufgabe: Gegeben die Punkte $P_1(x_1y_1)$, $P_2(x_2y_2)$, $P_3(x_3y_3)$. Die Gleichung des durch sie hindurchgehenden Kreises zu finden.

Lösung: Man nehme diese Gleichung am besten in der Form 2) an:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0,$$

setze hier für die laufenden Koordinaten xy der Reihe nach x_1, y_1, dann x_2, y_2 und endlich x_3, y_3 ein und ermittele nun m, n, p als „Unbekannte“. Dann stelle man die Form 1) wieder her und bestimme so a, b, r, also Mittelpunkt und Radius.

Aufgabe: Gegeben ein Kreis durch seine Gleichung

$$U \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 \equiv x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

und ein Punkt $P(\xi, \eta)$. Die Lage des Punktes zum Kreise zu bestimmen.

Der Punkt liegt innerhalb oder ausserhalb des Kreises, je nachdem sein Abstand ϱ vom Mittelpunkt kleiner oder grösser ist als r. Nun ist

$$\varrho = \sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2},$$

also

$$\varrho^2 - r^2 = (\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 - r^2.$$

Rechts steht aber wieder U, wenn dort statt $x\,y$ gesetzt worden ξ, η. Je nachdem also

$$U(\xi, \eta) \gtreqless 0$$

liegt P ausserhalb, auf oder innerhalb des Kreises.

Unter Potenz eines Punktes P in Bezug auf einen Kreis versteht man bekanntlich das Produkt der von diesem Punkt aus gerechneten Sekantenabschnitte auf irgend einer durch P gezogenen, den Kreis schneidenden Sekante. Liegt P ausserhalb (Fig. 51), so erhält die Potenz das Zeichen $+$, und man stellt ihren Werth am einfachsten als Quadrat über der durch P an den Kreis gelegten Tangente dar; liegt P innerhalb, so wird die Potenz, die dann $=$ dem Quadrat der halben kürzesten (auf dem Durchmesser durch (P) senkrechten) Sehne ist, negativ genommen. Liegt endlich P auf dem Kreise, so ist seine Potenz $= 0$.

Im ersten Falle findet man (Fig. 51):

$$l^2 = PM^2 - r^2 = (\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 - r^2 = U(\xi, \eta). \quad \textbf{5a)}$$

Im zweiten Falle ist (hier ist der betreffende Punkt in Fig. 51 zur Unterscheidung mit (P) bezeichnet worden):

$$s^2 = r^2 - MP^2 = r^2 - (\xi - a)^2 - (\eta - b)^2$$

oder:

$$-s^2 = (\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 - r^2 = U(\xi, \eta). \qquad \textbf{5b)}$$

Im dritten Falle endlich wird sofort:

$$0 = (\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 - r^2 = U(\xi, \eta). \qquad \textbf{5c)}$$

Also: Die Potenz eines Punktes $P(\xi, \eta)$ in Bezug auf einen Kreis wird analytisch durch den Ausdruck $U(\xi, \eta)$ bestimmt.

z. B.: $U \equiv x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$ (Kreis).
$P(-4, -4)$, $P'(+5, +1)$, $P''(+3, +2)$.

Man findet durch Einsetzen:

$$U(-4, -4) = +13, \; U(+5, +1) = -7, \; U(+3, +2) = 0.$$

Somit liegt P ausserhalb des Kreises, und die Tangente von P hat die Länge $l = \sqrt{13}$. P' liegt innerhalb des Kreises, und die halbe kürzeste Sehne hat die Länge $s = \sqrt{7}$. P'' liegt auf dem Umfang des Kreises.

Aufgabe: Gegeben ein Kreis durch seine Gleichung:

$$U \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0,$$

und eine Gerade durch ihre Gleichung:

$$V \equiv \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Es soll die Lage der Geraden zum Kreise ermittelt werden.

Lösung: Am schnellsten wird man zum Ziele gelangen durch Berechnung der Länge Δ des Lotes von $M(a, b)$ auf die Gerade nach Formel 3') § 9:

$$\Delta = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma}{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

und nachfolgende Vergleichung von Δ mit r. Je nachdem daher:

$$(\alpha a + \beta b + \gamma)^2 - (\alpha^2 + \beta^2) r^2 \gtreqless 0$$

läuft die Gerade ganz ausserhalb des Kreises (ist imaginäre Sekante), berührt den Kreis oder schneidet ihn in zwei Punkten.

z. B.: $U \equiv x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11$
$\equiv (x - 3)^2 + (y + 4)^2 - 36 = 0$ (Kreis)
$V \equiv -4x + 5y - 7 = 0$ (gerade Linie).

Da hier $a = +3$, $b = -4$, $r = 6$, $\alpha = -4$, $\beta = +5$, $\gamma = -7$, so:

$$(\alpha a + \beta b + \gamma)^2 - (\alpha^2 + \beta^2) r^2 = 39^2 - 41 \cdot 36 = +45$$

d. h. die Gerade läuft ausserhalb des Kreises ($\Delta = \frac{39}{\sqrt{41}} = 6{,}09$, $r = 6{,}00$).

Eine andere, sogar ausgeprägt analytische, hier aber etwas umständlichere Lösung würde durch die Berechnung der Koordinaten der Schnittpunkte von Kreis und gerader Linie geboten werden. Man stelle hierzu etwa y explicite her:

$$y = -\frac{\alpha x + \gamma}{\beta}$$

und setze dies in die Gleichung des Kreises ein. So entsteht eine quadratische Gleichung für x. Je nachdem diese Gleichung zwei imaginäre, oder zwei reelle Wurzeln hat, ist die Linie eine imaginäre oder reelle Sekante etc.

Aufgabe: Gegeben zwei Kreise durch ihre Gleichungen:

$$U_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 \equiv x^2 + y^2 + m_1 x + n_1 y + p_1 = 0,$$
$$U_2 \equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 \equiv x^2 + y^2 + m_2 x + n_2 y + p_2 = 0.$$

Ihre Lage ist zu ermitteln.

Lösung: Man berechne hierzu die Centrale $c = M_1 M_2$ durch die Formel:

$$c = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

Es kann nun sein

1) $c > r_1 + r_2$, die Kreise liegen ausserhalb einander.
2) $c = r_1 + r_2$, sie berühren sich von aussen.
3) $c < r_1 + r_2$ aber $c > [r_1 - r_2]$, sie schneiden sich.
4) $c = [r_1 - r_2]$, sie berühren sich von innen.
5) $c < [r_1 - r_2]$, der kleinere Kreis liegt ganz innerhalb des grösseren.

5a) $c = 0$. Die Kreise sind concentrisch.

Winkel, unter welchem zwei Kurven sich schneiden, ist der Winkel, welchen im Schnittpunkt die Tangenten oder auch die Normalen bilden. Da für den Kreis die Normalen mit den Radien zusammenfallen, so wird hier der Schnittwinkel α nach dem Cosinussatz durch die Gleichung bestimmt.

$$\cos \alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - c^2}{2 r_1 r_2}.$$

Sollen sich im besonderen die beiden Kreise senkrecht schneiden, so muss sein:

$$r_1^2 + r_2^2 - c^2 = 0$$

oder

$$r_1^2 + r_2^2 - (a_1 - a_2)^2 - (b_1 - b_2)^2 = 0$$

oder nach 3):

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 - 2(p_1 + p_2) = 0. \qquad \textbf{6)}$$

Man sieht, dass diese Bedingung grosse Aehnlichkeit hat mit der Formel 5) § 9, für das Senkrechtstehen zweier Geraden.

Aufgabe: Gegeben zwei Kreise durch ihre Gleichungen:

$$U_1 = 0, \; U_2 = 0.$$

Es ist das durch sie bestimmte Kreisbüschel zu ermitteln:

$$U_1 + \lambda U_2 = 0.$$

Dass die allgemeine Gleichung $U_1 + \lambda U_2 = 0$ einen Kreis darstellt, geht sofort durch Ausschreiben hervor, denn es wird:

$$U_1 + \lambda U_2 = x^2 (1 + \lambda) + y^2 (1 + \lambda) + (m_1 + \lambda m_2) x$$
$$+ (n_1 + \lambda n_2) y + (p_1 + \lambda p_2).$$

Die Kriterien der Kreisgleichung sind daher für jeden Werth von λ erfüllt, da stets das Glied mit xy fehlt und der Coefficient von x^2 = dem Coefficient von y^2. Will man diesen Coefficienten = 1 machen, so ist noch durch $1 + \lambda$ zu dividiren und der allgemeinen Gleichung die Form zu ertheilen:

$$U \equiv \frac{U_1 + \lambda U_2}{1 + \lambda} = 0. \qquad \textbf{7)}$$

Wenn die beiden anfänglich gegebenen Kreise sich in zwei Punkten schneiden, so müssen alle Kreise des Kreisbüschels durch diese beiden Punkte hindurchgehen, eben weil die allgemeine Gleichung eine Verbindung der ursprünglichen Gleichungen ist. Und umgekehrt bilden alle durch dieselben beiden Punkte gehenden Kreise ein Kreisbüschel.

Fallen die beiden Schnittpunkte zusammen, d. h. berühren sich die beiden Kreise $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ in einem Punkte, so besteht das Kreisbüschel aus allen Kreisen, die sich unter einander und die gegebenen Kreise in diesem Punkt berühren.

Wenn aber die beiden gegebenen Kreise überhaupt keinen Punkt gemeinsam haben, z. B. ganz ausser einander liegen oder auch der kleinere ganz innerhalb des grösseren liegt? Auch dann bestimmt 7) ein Kreisbüschel, doch wird man hier wohl etwas tiefer greifen müssen und sich nach Herleitung einer Construktion umzusehen haben, welche in allen Fällen zum Ziele führt.

Man bemerke zuerst, dass für $\lambda = -1$ der zugehörige Kreis in eine gerade Linie mit der Gleichung

$$U_1 - U_2 = 0 \text{ oder } x(m_1 - m_2) + y(n_1 - n_2) + (p_1 - p_2) = 0 \qquad \textbf{7a)}$$

ausartet. Sie steht auf der Centrale senkrecht, und ist selbst-

verständlich nichts anderes als die Sekante oder Chordale der beiden Kreise, falls diese sich schneiden. Aber auch dann, wenn dies nicht der Fall ist, wird sie als Chordale bezeichnet (sie geht dann durch die beiden imaginären Schnittpunkte).

Eine geometrische Deutung dieser Chordale, die auch in diesem Falle nicht versagt, muss die Gleichung 7a) geben. Sie sagt aus, dass ein Punkt $P(x,y)$, wenn er auf der Chordale liegt, dasselbe Resultat liefern muss, ob man seine Koordinaten in U_1 oder U_2 einsetzt, denn nach 7a) soll eben $U_1 = U_2$ sein. Daher nach dem Satz von der Potenz:

Die Chordale ist die Linie gleicher Potenzen in Bezug auf die beiden Kreise $U_1 = 0$, $U_2 = 0$.

Die Chordale ist aber auch eine Linie gleicher Potenzen für alle Kreise des Kreisbüschels, denn setzt man in 7) $U_1 = U_2$, so folgt:

$$U = \frac{U_1 + \lambda U_2}{1+\lambda} = \frac{U_1 + \lambda U_1}{1+\lambda} = U_1 = U_2.$$

Bei dieser Definition der Chordale als Linie gleicher Potenzen werden die Schnittpunkte der Kreise nicht gebraucht. Sie liefert auch Konstruktionen dieser wichtigen Linie selbst dann, wenn die Schnittpunkte imaginär sind.[1])

Eine zweite Eigenschaft des Kreisbüschels ist die, dass alle Mittelpunkte seiner Kreise auf einer Geraden liegen. Denn nach 7) wird:

$$m = \frac{m_1 + \lambda m_2}{1+\lambda}, \quad n = \frac{n_1 + \lambda n_2}{1+\lambda},$$

oder, da: $\quad a = -\frac{m}{2}, \quad b = -\frac{n}{2},$

auch: $\quad a = \frac{a_1 + \lambda a_2}{1+\lambda}, \quad b = \frac{b_1 + \lambda b_2}{1+\lambda},$

und dies ist nichts anderes als die uns wohl bekannte Parameterdarstellung einer Geraden 3) § 5, nur dass $+\lambda$ durch $-\lambda$ ersetzt ist.

Damit sind die Mittel bereit gestellt, das Kreisbüschel 7) selbst dann zu zeichnen, wenn die beiden Kreise $U_1 = 0$,

[1]) Die einfachste wie folgt: Man zeichne irgend einen dritten Kreis, der beide gegebene Kreise schneidet, ziehe die beiden Sekanten und fälle von deren Schnittpunkt das Lot auf die Centrale der gegebenen Kreise. Dieses Lot ist die gesuchte Chordale.

$U_2 = 0$ sich nicht schneiden (Fig. 52). Man ziehe die Centrale $M_1 M_2$, auf welcher die Mittelpunkte aller Kreise liegen müssen, konstruire ferner die Chordale und suche den Schnittpunkt O auf. Da O wie jeder andere Punkt der Chordale ein Punkt gleicher Potenzen für $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ sein muss, so werden die Tangenten von O an diese Kreise einander gleich $= k$. Da aber O ein Punkt gleicher Potenzen in Bezug auf alle Kreise des Kreisbüschels werden soll, so geht die Konstruktion des letzteren folgendermaassen vor sich:

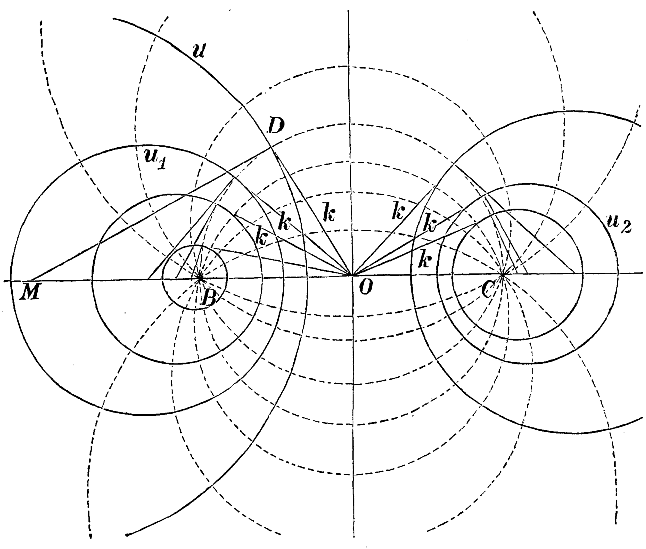


Fig. 52.

Man zeichne den Kreis um O mit k als Radius, ziehe von einem beliebigen Punkt M der Centrale die Tangente und schlage mit dieser Tangente um M den Kreis. Dieser Kreis ist dann ein Kreis des Büschels. Denn erstens liegt sein Mittelpunkt auf der Centralen $M_1 M_2$ und zweitens hat die Potenz von O in Bezug auf ihn den Werth k^2, da die Tangente von O an ihn die Länge k hat. Also ist O ein Punkt gleicher Potenzen in Bezug auf alle so gezeichneten Kreise, und ein gleiches gilt auch für alle Punkte der Chordale, z. B. für irgend einen Punkt A, nur dass die Tangenten nicht die gemeinsame Länge $= k$, sondern $= \sqrt{k^2 + OA^2}$ haben.

Lässt man M mit B oder C zusammenfallen, so schrumpft

der zugehörige Kreis zu einem Punkt zusammen, weshalb B und C auch die Grenzpunkte des Kreisbüschels genannt werden. Wird aber M zwischen B und C angenommen, so existirt der zugehörige Kreis nicht (ist imaginär).

Bei der angegebenen Konstruktion ist O, der Schnittpunkt der Chordale mit der Centrale, nur der Symmetrie wegen genommen worden. Im übrigen kann er durch einen beliebigen Punkt A der Chordale ersetzt werden, nur dass dann, wie vorher bemerkt, auch k durch $\sqrt{k^2 + OA^2}$ zu ersetzen ist. So entsteht ein zweites (punktirtes) Büschel von Kreisen, die sämmtlich durch die Grenzpunkte B und C hindurchgehen und die besondere Eigenthümlichkeit der Lage zum ersten Büschel aufweisen, dass jeder Kreis des einen Büschels jeden Kreis des anderen senkrecht schneidet.

Vielleicht ist es hier dem Leser nicht ohne Interesse, zu bemerken, dass (sofern man sich auf das Innere des Kreises um O mit k als Radius beschränkt) die Aehnlichkeit mit derjenigen Darstellung der Erdhalbkugel unverkennbar ist, welche in der Regel in unseren Atlanten gebraucht wird. Und diese Aehnlichkeit ist hier sogar Identität; wir sind ganz zufällig auf die sogenannte stereographische Projektion der Kugel gestossen.[1])

Die einfachste analytische Darstellung dieser beiden Kreisbüschel, bei welcher Centrale und Chordale mit einander tauschen, wird offenbar erhalten werden, wenn M_1M_2 zur x-Achse, die Chordale aber zur y-Achse gemacht wird. Dann ist das erste Kreisbüschel durch die Gleichung gegeben:

$x^2 + y^2 + mx + k^2 = 0$ (m ist hier als Parameter des Büschels zu nehmen),

während das zweite Kreisbüschel analytisch durch die Form bestimmt wird:

$x^2 + y^2 + ny - k^2 = 0$ (n ist Parameter),

[1]) Diese Projektion ist zugleich die älteste, vor mehr als 2000 Jahren von dem grossen Astronomen Hipparch gefundene und auch heute noch am meisten angewendete. Lässt man B und C mit Nord- und Südpol der Erde zusammenfallen, so liefert das erste Kreisbüschel die Parallelkreise, das zweite dagegen die Meridiane. Man erhält eine solche Abbildung, wenn die abzubildende Erdhälfte von dem Mittelpunkt der anderen Erdhälfte aus projicirt und das entstehende Strahlenbündel durch die Aequatorebene oder durch eine Parallelebene zu ihr geschnitten wird.

worauf der blosse Anblick nach Formel 6) noch einmal die Thatsache beweist, dass jeder Kreis des einen Büschels von jedem Kreis des anderen senkrecht geschnitten wird.

Ausartungen des Kreisbüschels. 1. Wenn die beiden gegebenen Kreise $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ concentrisch werden, also $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$, so hat die Chordale die Gleichung $0x + 0y + (p_1 - p_2) = 0$. Sie liegt unendlich fern und das Kreisbüschel umfasst alle zu $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ concentrischen Kreise, während sich das senkrecht durchdringende Kreisbüschel auf das Strahlenbüschel reducirt, dessen Centrum mit dem gemeinsamen Centrum des concentrischen Kreises übereinstimmt. 2. Wenn die beiden gegebenen Kreise sich berühren, so fallen B und C in einen Punkt zusammen. Das erste Kreisbüschel besteht dann aus allen Kreisen, welche $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, in diesem Punkt berühren; das zweite Kreisbüschel wird auch aus solchen sich in demselben Punkt berührenden Kreise gebildet; nur steht die gemeinsame Tangente auf derjenigen des ersten Büschels senkrecht.

Aufgabe: Gegeben irgend drei Kreise (die nicht demselben Büschel angehören).

$$U_1 \equiv x^2 + y^2 + m_1 x + n_1 y + p_1 = 0$$
$$U_2 \equiv x^2 + y^2 + m_2 x + n_2 y + p_2 = 0$$
$$U_3 \equiv x^2 + y^2 + m_3 x + n_3 y + p_3 = 0.$$

Es soll das durch sie bestimmte „Kreisbündel“:

$$U \equiv \frac{U_1 + \lambda U_2 + \mu U_3}{1 + \lambda + \mu} = 0 \qquad \mathbf{8)}$$

untersucht werden.

Jedem Werthepaar λ, μ entspricht ein Kreis, und Zweck des Divisors $1 + \lambda + \mu$ ist, die Coefficienten von x^2 und y^2 beide $= 1$ zu machen. Die Coefficienten m, n und p erhalten für den Kreis $U = 0$ die Werthe:

$$m = \frac{m_1 + \lambda m_2 + \mu m_3}{1 + \lambda + \mu},\ n = \frac{n_1 + \lambda n_2 + \mu n_3}{1 + \lambda + \mu},$$
$$p = \frac{p_1 + \lambda p_2 + \mu p_3}{1 + \lambda + \mu}. \qquad \mathbf{8a)}$$

Unter den Kreisen des Bündels giebt es unzählig viele gerade Linien, die erhalten werden, wenn $1 + \lambda + \mu = 0$ oder $\mu = -1 - \lambda$. Dies ist in $U = 0$ einzusetzen (nach Fortlassung des Nenners), worauf man erhält:

$$(U_1 - U_3) + \lambda\,(U_2 - U_3) = 0.$$

Da $U_1 - U_3$ und $U_2 - U_3$ linear sind, so stellt diese Gleichung ein Strahlenbüschel vor, welches zu unserem Kreisbündel gehört und den Inbegriff seiner „Chordalen“ bildet.

Nimmt man statt der Gleichung

$$1 + \lambda + \mu = 0$$

irgend eine andere Gleichung ersten Grades zwischen λ und μ

$$\alpha + \beta\lambda + \gamma\mu = 0$$

und setzt den hieraus entspringenden Werth $\mu = -\frac{\alpha + \beta\lambda}{\gamma}$ in $U = 0$ ein, so folgt:

$$(U_1 - \frac{\alpha}{\gamma} U_3) + \lambda\, (U_2 - \frac{\beta}{\gamma} U_3) = 0,$$

also ein Kreisbüschel. Das Kreisbündel umfasst unzählig viele solche Kreisbüschel und zwar so, dass irgend zwei Kreise, die zum Bündel gehören, ein Kreisbüschel erzeugen, dessen sämmtliche Kreise ebenfalls im Bündel enthalten sind.

Die Chordalen der drei gegebenen Kreise, also die drei Geraden mit den Gleichungen $U_1 - U_2 = 0$, $U_2 - U_3 = 0$ $U_3 - U_1 = 0$ schneiden sich in einem Punkt, dem Chordalpunkt des Bündels. Er ist ein Punkt gleicher Potenzen nicht allein für die drei anfänglich gegebenen Kreise, sondern für alle Kreise des Kreisbündels, denn $U_1 = U_2 = U_3$ liefert in 8) eingesetzt auch $U = U_1 = U_2 = U_3$.

Man lege den Anfangspunkt in diesen Chordalpunkt. Da aber bei Einsetzen von $x = 0$ und $y = 0$ sich U_1, U_2, U_3 auf p_1, p_2, p_3 reduciren, so muss dann $p_1 = p_2 = p_3 = p$ werden. Der Mittelpunkt $\left(a = -\frac{m}{2},\ b = -\frac{n}{2}\right)$ ist nun nach den Formeln 8a) irgend wo anzunehmen, so dass bei dieser Wahl des Anfangspunktes folgende einfache Darstellung des Kreisbündels entsteht.

Man setze voraus, dass in der Gleichung

$$U \equiv x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

der Coefficient p einen unveränderlichen Werth hat, während m und n beliebig sein können, so stellen alle so erhaltenen (doppelt unendlich vielen) Kreise ein Kreisbündel dar, dessen Chordalpunkt der Anfangspunkt ist.

Daraus ergeben sich nun, je nachdem p positiv oder negativ ist, folgende Konstruktionen der Kreise dieses Bündels.

1) p ist positiv, $p = + k^2$.

Man schlage um den Chordalpunkt mit k als Radius den Kreis (derselbe gehört nicht dem Bündel an), wähle einen beliebigen Punkt (ausserhalb dieses Kreises) als Mittelpunkt eines Kreises des Bündels, so ist die Tangente von ihm an den erstgenannten Kreis der Radius des gesuchten Kreises. Er schneidet den vorigen senkrecht. Und umgekehrt: Alle Kreise, welche einen gegebenen Kreis senkrecht schneiden, bilden ein Kreisbündel. Die Punkte des ersteren sind die Grenzpunkte dieses Bündels.

2) p ist negativ, $p = - k^2$.

Man schlage auch hier um den Chordalpunkt mit k als Radius den Kreis, der aber diesmal zum Bündel gehört und zugleich derjenige mit dem kleinsten Durchmesser ist. Dann ist die kürzeste durch den Chordalpunkt gehende Sehne für jeden Kreis des Bündels $= 2k$, also muss jeder Kreis durch zwei gegenüberliegende Punkte des ersten Kreises gehen. Und umgekehrt: Alle Kreise, welche durch zwei gegenüberliegende Punkte eines festen Kreises hindurchgehen, bilden ein Kreisbündel. [Ein solches Kreisbündel werden z. B. alle grössten Kreise auf der Kugel bei stereographischer Projektion.]

Ausartungen von Kreisbündeln: 1. Wenn $p = 0$, so haben wir den Grenzfall zwischen beiden Arten von Kreisbündeln. Es besteht dann aus allen durch den Chordalpunkt gehenden Kreisen. 2. Wenn die Mittelpunkte der drei ursprünglich gegebenen Kreise $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ auf einer Geraden liegen, so befindet sich der Chordalpunkt in unendlicher Ferne und das Bündel besteht aus allen Kreisen, deren Mittelpunkte auf dieser Geraden liegen. 3. Wenn die drei gegebenen Kreise in irgend drei Gerade ausarten, so werden alle Kreise des Bündels zu geraden Linien und das Bündel selbst wird zur Gesammtheit aller Geraden der Ebene.

Uebrigens vergleiche man in Bezug auf Kreisbüschel und Kreisbündel die in § 8 erläuterte Theorie der Darstellung von Kurvenschaaren durch eine einzige Gleichung. Nur sind die Parameter hier in der Gleichung linear enthalten; es sind lineare Kreisbüschel und Kreisbündel, die wir betrachtet hatten.

Aufgaben:

1. Gegeben $P_1(+2, -3)$, $P_2(+5, -1)$, $P_3(+4, +3)$. Gesucht Gleichung des durch sie hindurchgehenden Kreises, sowie Mittelpunkt und Radius.

2. Von einem Kreisbüschel ist ein Kreis

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$$

und die Chordale:

$$x - y - 7 = 0$$

gegeben. Es soll der Kreis des Büschels bestimmt werden, der in Bezug auf $P(+1, -1)$ die Potenz -3 besitzt.

3. Gegeben die Kurve (Parabel)

$$y = \frac{x^2}{2q}$$

und der Kreis

$$x^2 + y^2 + 16qx - 14qy - 12q^2 = 0.$$

Es sind die Durchschnittspunkte beider Kurven zu bestimmen.

---

§ 13.

Die Gleichungen der Ellipse, Hyperbel und Parabel.

Definition: Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen von zwei festen Punkten eine gegebene Summe haben.

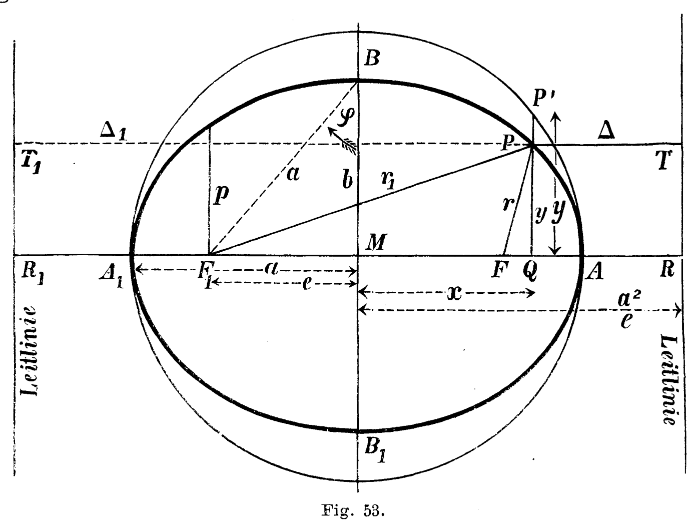


Fig. 53.

Die beiden festen Punkte heissen Brennpunkte F und F_1 (Fig. 53), ihr Abstand ist die lineare Excentricität, meist mit $2e$ bezeichnet. Ihre Mitte M ist zugleich Mittelpunkt der Ellipse. Die Summe der beiden Brennstrahlen r und r_1, die nach der Definition constant sein soll, ist zugleich die grosse Achse $AA_1 = 2a$. Denn da A und A_1 auch Punkte der Ellipse sind, so ist

$$FA + F_1A = FA_1 + F_1A_1 = 2a.$$[1]

Da nun die Symmetrie $F_1A = FA_1$ giebt, so folgt $FA + FA_1 = 2a$, d. h. $AA_1 = 2a$, q. e. d.

Kommt der laufende Punkt P auf die Mittelsenkrechte von FF_1 zu liegen, fällt er also mit B_1 oder B zusammen, so wird $r_1 = r = a$. Man nennt BB_1 die kleine Achse $= 2b$. Aus dem rechtwinkligen Dreieck MBF_1 liest man sofort die grundlegende Beziehung zwischen e, a und b ab:

$$a^2 = b^2 + e^2,\ e^2 = a^2 - b^2,\ b^2 = a^2 - e^2. \qquad \mathbf{1)}$$

Die Gestalt der Ellipse ist augenscheinlich durch das Verhältniss $e:a$ gegeben, weshalb man für dasselbe die besondere Bezeichnung $\frac{2e}{2a} = \frac{e}{a} = \varepsilon =$ numerische Excentricität gewählt hat. Sie ist die Excentricität, bezogen auf die grosse Achse als Einheit.

Fernere Bezeichnungen, die man kennen muss:

$2a - 2b =$ Unterschied der beiden Achsen $=$ Abplattung (linear).

Für die Erde ist bekanntlich diese Abplattung $=$ rund 6 Meilen.

$$\frac{2a - 2b}{2a} = \frac{a - b}{a} = \alpha = \text{Abplattung (numerisch)}.$$

α ist die Abplattung, bezogen auf die grosse Achse als Einheit. Da der Durchmesser der Erde $= 1719$ Meilen, so ist hier $\alpha = \frac{6}{1719} =$ (rund) $\frac{1}{300}$.

ε und α sind stets ächte Brüche. Für den einen Grenzwerth $\varepsilon = 0$ wird $b = a$, $e = 0$ und auch $\alpha = 0$. Die Brennpunkte fallen zusammen, aus der Ellipse wird ein Kreis. Für den anderen Grenzwerth $\varepsilon = 1$ wird $e = a$, $b = 0$, $\alpha = 1$.

---

[1]) Hier sind alle Strecken absolut (ohne Vorzeichen) zu nehmen.

Die Ellipse ist zu einem doppelt zu zählenden Strich abgeplattet.

Es ist wohl zu beachten, dass Excentricität ε und Abplattung α, wenn sie auch beide zugleich verschwinden und zugleich den grössten Werth ($= 1$) annehmen, doch von einander durchaus verschieden sind. Wohl aber kann die Abplattung durch die Excentricität und umgekehrt ausgedrückt werden. Denn es ist:

$$\alpha = \frac{a - b}{a} = \frac{a - \sqrt{a^2 - e^2}}{a} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{e}{a}\right)^2} = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Daraus geht leicht hervor, dass $\alpha < \varepsilon$, denn man kann die Gleichung zwischen ihnen auch so schreiben:

$$\alpha = \frac{\varepsilon^2}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Daher ist $\alpha < \varepsilon^2$ und also umsomehr $< \varepsilon$.

Wird ε sehr klein, so ist der Nenner ziemlich genau $= 2$ und dann kann gesetzt werden:

$$\alpha = \frac{\varepsilon^2}{2}.$$ [1]

Der Excentricitätswinkel φ ist zwischen b und a im Dreieck F_1MB. Daher:

$$\sin\varphi = \frac{e}{a}, \quad \cos\varphi = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{e}{b}.$$

---

[1]) So ist z. B. für die Bahn der Erde um die Sonne $\varepsilon = \frac{1}{60}$, also mit sehr grosser Annäherung $\alpha = \frac{1}{7200}$. Wollte man diese Bahn in einer Zeichnung mit dem Maasstabe $2a = 1$ m vollkommen getreu wiedergegeben, so würde $2b$ um $\frac{1}{7200}$, also rund $\frac{1}{7}$ mm kleiner sein und die grösste Abweichung der Ellipse vom Kreise sogar nur $\frac{1}{14}$ mm betragen. Da ein solch kleiner Unterschied selbst bei sauberster Ausführung gar nicht mehr darzustellen wäre, so müsste man eben die Abplattung schlechterdings ganz vernachlässigen und einen Kreis zeichnen. Wohl aber würde die Excentricität, d. h. die Stellung der Sonne in einen Brennpunkt sehr gut in der Zeichnung zum Ausdruck kommen, da hier $a = 500$ mm, also $e = \frac{500}{60} = 8\frac{1}{3}$ mm.

Diese Kleinheit der Abplattung α im Verhältniss zur Excentricität ε (wenn ε selbst klein ist) erklärt, dass schon vor mehr als 2000 Jahren von Hipparch die excentrische Stellung der Sonne (oder vielmehr der Erde, da damals die Erde als ruhend angenommen worden) erkannt wurde, während die ovale, elliptische Gestalt der Planetenbahnen erst von Keppler nachgewiesen worden ist.

Der Parameter $= 2p$, beziehungsweise der Halbparameter $= p$ der Ellipse. Es ist $p =$ dem Lot im Brennpunkt F_1 auf der grossen Achse, genommen bis zum Schnitt mit der Ellipse. Da dieser Punkt auch der Definitionsgleichung der Ellipse genügen muss, so folgt der andere Brennstrahl $= 2a - p$ und daher aus dem rechtwinkligen Dreieck:

$$(2a - p)^2 = p^2 + (2e)^2$$

und hieraus:

$$p = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

Die beiden Leitlinien (oder Direktricen), die eine zu F, die andere zu F_1 gehörig. Sie stehen auf der grossen Achse senkrecht und haben vom Mittelpunkt die Abstände $MR = MR_1 = \frac{a^2}{e}$, woraus sofort nach 12) § 1 folgt, dass A, A_1, F, R und ebenso A, A_1, F_1, R_1 vier harmonische Punkte sind.

Scheitelkreise sind die beiden über den Achsen — deren Endpunkte A, A_1, B, B_1 auch Scheitel der Ellipse genannt werden — als Durchmesser errichteten Kreise.

Nach dieser Aufzeichnung der wichtigsten an die Ellipse sich knüpfenden Begriffe schreiten wir nun zur Bildung ihrer Gleichung. Der Symmetrie Rechnung tragend wird man den Anfangspunkt am besten in den Mittelpunkt M hineinlegen, die grosse Achse als x-Achse (Anfangsrichtung nach A), die kleine Achse als y-Achse nehmen. Dann ist nach Einführung des laufenden Punktes $P(x, y)$:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{y^2 + (x - e)^2} \\ r_1 &= \sqrt{y^2 + (x + e)^2} \end{aligned} \tag{2}$$

in die Definitionsgleichung $r + r_1 = 2a$ eingesetzt, giebt:

$$\sqrt{y^2 + (x - e)^2} + \sqrt{y^2 + (x + e)^2} = 2a, \tag{3}$$

womit die gesuchte Gleichung hergestellt ist. Aber augenscheinlich ist ihre Form noch nicht die beste, da vielmehr erst die Wurzeln fortzuschaffen sind. Hierzu bringe man die eine Wurzel (die zweite) auf die rechte Seite und quadrire:

$$y^2 + (x - e)^2 = y^2 + (x + e)^2 - 4a\sqrt{y^2 + (x + e)^2} + 4a^2,$$

oder nach Zusammenziehung und Division durch 4:

$$a\sqrt{y^2 + (x + e)^2} = a^2 + ex,$$

quadrirt man noch einmal, so folgt:

$$a^2y^2 + a^2(x + e)^2 = (a^2 + ex)^2,$$

also:

$$x^2(a^2 - e^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - e^2),$$

oder, da:

$$a^2 - e^2 = b^2,$$

$$x^2b^2 + y^2a^2 - a^2b^2 = 0,$$

oder auch:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad 4)$$

als Mittelpunktgleichung der Ellipse.

Es ist schlechterdings unmöglich, dieser Gleichung 4) ihren Ursprung aus der Gleichung 3) a priori anzusehen; vielmehr lässt ihre Form deutlich erkennen, dass es eine andere Definition der Ellipse geben muss, die sofort auf ihre Mittelpunktsgleichung führt. Eine solche erhält man mit Hilfe des grossen Scheitelkreises durch denjenigen Punkt $P'(X, Y)$ auf ihm, der mit P dieselbe Abscisse hat und im selben Quadranten liegt. Wird die Mittelpunktsgleichung dieses Kreises

$$X^2 + Y^2 - a^2 = 0 \text{ oder } \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} - 1 = 0$$

angezogen und beachtet, dass $X = x$ sein soll, so folgt durch Subtraktion von 4):

$$\frac{Y^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

oder, da Y und y dasselbe Vorzeichen haben:

$$\frac{Y}{a} = \frac{y}{b}, \text{ oder } y : Y = b : a, \text{ oder auch } y = Y \cdot \frac{b}{a} = Y \cdot \cos\varphi$$

d. h. die Ellipse entsteht aus dem Scheitelkreis, durch Verkürzung sämmtlicher Ordinaten im Verhältniss $b : a$ oder $\cos\varphi : 1$.

Diese Verkürzung entsteht offenbar durch Drehung des Kreises aus der Ebene heraus um den Durchmesser AA_1 bis seine neue Lage mit der alten den Excentricitätswinkel φ bildet, wenn darauf der Kreis senkrecht auf die ursprüngliche Ebene projicirt wird. Dagegen kann andrerseits der kleine Scheitelkreis als Projektion der Ellipse betrachtet werden, wenn dieses mal die Drehung um die kleine Achse erfolgt.

Bei dieser Gelegenheit wollen wir noch eine dritte Erzeugung der Ellipse besprechen, um die Bedeutung der Leitlinien für diese Kurve festzustellen.

Aus den Gleichungen 2) folgt durch Quadriren und Subtrahiren

$$r_1^2 - r^2 = 4ex$$

und da:

$$r_1 + r = 2a$$

$$r_1 - r = \frac{2ex}{a} = 2\varepsilon x$$

und hieraus sofort:

$$\begin{aligned} r &= a - \varepsilon x \\ r_1 &= a + \varepsilon x \end{aligned} \qquad 5)$$

zwei sehr einfache und wichtige Formeln. Da $r + r_1 = 2a$, so ist der „Mittelwerth" jedes Brennstrahles $= a$ und die Formeln 5) sagen aus, dass die Abweichung vom Mittelwerth $= \pm\, \varepsilon x$; d. h. proportional zu x ist.

Halten wir uns an die erste Gleichung:

$$r = a - \varepsilon x = \varepsilon \left(\frac{a}{\varepsilon} - x\right) = \varepsilon \cdot \left(\frac{a^2}{e} - x\right).$$

Macht man $MR = \frac{a^2}{e}$ und errichtet in R die Senkrechte auf der grossen Achse, d. h. construirt man die F zugehörige Leitlinie, so wird das Lot $\varDelta$ von P auf letztere Gerade sofort durch die Formel gegeben:

$$\varDelta = \frac{a^2}{e} - x$$

und daher:

$$r = \varDelta \cdot \varepsilon, \text{ oder } r : \varDelta = \varepsilon : 1 = e : a, \qquad 6)$$

und ebenso:

$$r_1 : \varDelta_1 = e : a,$$

d. h. die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen von einem festen Punkte (einem Brennpunkt) und einer festen Linie (der zugehörigen Leitlinie) in einem constanten Verhältniss stehen, vorausgesetzt, dass dieses Verhältniss $\frac{e}{a} < 1$ ist.

Selbstverständlich könnte man diese Eigenschaft der Ellipse auch als ihre Definition nehmen, um die Gleichung abzuleiten; da aber hier nur ein Brennpunkt und die zugehörige Leitlinie genannt werden, so kann man a priori in dieser Weise gar nicht das Vorhandensein eines Mittelpunktes und des anderen Brennpunktes voraussehen, sondern muss letztere erst a posteriori ableiten. [Es würde der Anfangspunkt etwa nach F oder nach R verlegt werden und dann durch Verschiebung die Mittelpunktsgleichung zu finden sein.]

Die Form 4) der Gleichung der Ellipse zeigt übrigens gar kein verschiedenes Verhalten der grossen und kleinen Achse an. Die Ellipse hat also ausser den auf der grossen Achse liegenden reellen noch zwei imaginäre Brennpunkte auf der kleinen Achse (im Abstande $\pm\, i\, e$ vom Mittelpunkt) und ebenso zwei zu diesen Brennpunkten zugehörige imaginäre Leitlinien.

Definition der Hyperbel: Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen von zwei festen Punkten einen gegebenen Unterschied haben.

Auch hier heissen die beiden festen Punkte Brennpunkte (Fig. 54), ihr Abstand Excentricität (linear) $= 2e$. Ihre Mitte M ist der Mittelpunkt der Hyperbel. Die beiden Scheitel A und A_1 liegen aber jetzt zwischen F und F_1 und wieder ist ihr Abstand $= 2a$, nur dass $a < e$. Nach der Definition ist für jeden Punkt P der Hyperbel

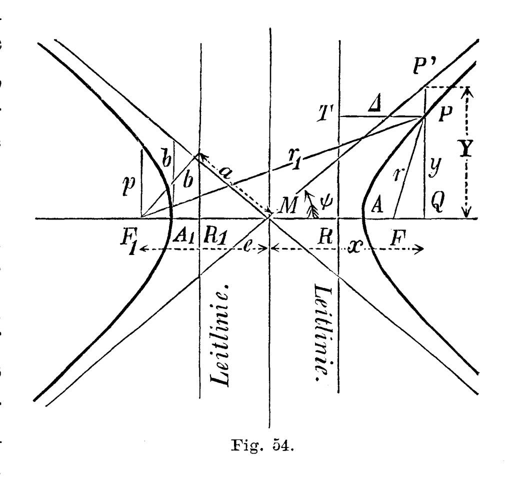


Fig. 54.

$$\pm\,(r - r_1) = 2a,$$

wo das doppelte Zeichen andeuten soll, dass sowohl $r_1 > r$, als auch $r > r_1$ sein kann, d. h. dass die beiden getrennten Kurvenzweige zu beiden Seiten der y-Achse erst zusammen die Hyperbel bilden.

Da $a < e$, so wird hier nicht $b^2 = a^2 - e^2$, sondern

$$b^2 = e^2 - a^2$$

gesetzt.

Die beiden Leitlinien der Hyperbel sind senkrecht auf der reellen Achse und haben wie bei der Ellipse den Abstand $\frac{a^2}{e}$ vom Mittelpunkt. Da aber $a < e$, so liegen jetzt die beiden Punkte R und R_1 zwischen A und A_1.

Der Parameter $= 2p$ ist gleichfalls das Lot im Brennpunkt auf der grossen Achse. Er ist an a und b durch die gleiche Formel wie früher:

$$p = \frac{b^2}{a}$$

geknüpft.

Zur Ableitung der Gleichung der Hyperbel mache man die reelle Achse zur x-Achse, die imaginäre zur y-Achse, dann wird:

$$r = \sqrt{y^2 + (x - e)^2}$$
$$r_1 = \sqrt{y^2 + (x + e)^2}$$

und dies in $\pm (r - r_1) = 2a$ eingesetzt, giebt:

$$\pm \left(\sqrt{y^2 + (x - e)^2} - \sqrt{y^2 + (x + e)^2}\right) = 2a.$$

Nach Fortschaffung der Wurzeln ist das Endresultat gleichlautend wie bei der Ellipse, also:

$$x^2 (a^2 - e^2) + y^2 a^2 - a^2 (a^2 - e^2) = 0.$$

Nur ist hier $a^2 - e^2 = - b^2$ (statt $= + b^2$), also:

$$- x^2b^2 + y^2a^2 + a^2b^2 = 0$$

oder:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad 7)$$

Wie man sieht, unterscheidet sich diese Gleichung von derjenigen der Ellipse nur durch das Vorzeichen des Gliedes $\frac{y^2}{b^2}$. Um den Verlauf der Hyperbel zu erkennen, stelle man aus 7) y explicite dar:

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2} \qquad 7a)$$

und nehme der Einfachheit wegen x und y beide positiv. y ist imaginär für $x < a$, wird $= 0$ für $x = a$ und wächst dann beständig mit x. Wenn x sehr gross geworden, so unterscheidet sich $\sqrt{x^2 - a^2}$ nur sehr wenig von x, so dass dann mit einer gewissen Annäherung gesetzt werden kann:

$$y = \frac{b}{a}\, x.$$

Dies ist die Gleichung einer geraden Linie, welcher sich die Hyperbel mit wachsendem x mehr und mehr anschmiegt. Um dies aber besser beurtheilen zu können, stelle man die Gleichung 7) der Hyperbel zusammen mit der Gleichung der Geraden:

$$Y = \frac{b}{a}\, X.$$

Dann ist für dieselbe Abscisse, d. h. für $X = x$ der Unterschied der Ordinaten:

$$Y - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}).$$

Setzt man hier $\lim x = \infty$, so wird $Y - y$ von der Form $\infty - \infty$, also zunächst unbestimmt. Man erweitere daher mit $x + \sqrt{x^2 - a^2}$, worauf sich ergiebt:

$$Y - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

also für $\lim x = \infty$.

$$Y - y = \frac{ab}{\infty + \infty} = \frac{ab}{\infty} = 0,$$

womit die unbegrenzte Annäherung der Hyperbel an die gerade Linie:

$$y = \frac{b}{a} x$$

streng erwiesen ist. Diese Linie heisst eine Asymptote der Hyperbel. Ihr Richtungswinkel ist der Asymptotenwinkel ψ, der hiernach durch die Formel bestimmt wird:

$$m = \operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \left(\text{also } \sin \psi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{e}, \ \cos \psi = \frac{a}{e}\right).$$

Setzt man in die Gleichung der Asymptote $x = a$, so wird $y = b$, womit auch eine geometrische Deutung von b, nämlich als Lot auf der grossen Achse im Scheitel der Hyperbel bis zur Asymptote (oder auch als Lot vom Brennpunkt auf die Asymptote) gefunden ist.

Aus der Symmetrie folgt, dass die Linie

$$y = -\frac{b}{a} x$$

gleichfalls eine Asymptote der Hyperbel ist. Beide Asymptoten vereint haben die Gleichung:

$$\left(y - \frac{b}{a} x\right) \left(y + \frac{b}{a} x\right) = 0$$

oder:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

d. h. man erhält die Gleichung der Asymptoten, wenn in der Mittelpunktsgleichung der Hyperbel das constante Glied ausgelassen wird.

Ist $a = b$, so wird der Asymptotenwinkel $\psi = 45^0$ und

die Asymptoten stehen senkrecht aufeinander. Die Hyperbel wird dann gleichseitig genannt.

Uebrigens giebt es unzählig viele Hyperbeln mit denselben Asymptoten. Denn da $\operatorname{tg}\psi = \frac{b}{a}$, so bleibt ψ unverändert, wenn $b : a$ unverändert bleibt. Setzt man daher $a\lambda$ statt a und $b\lambda$ statt b, so wird die Gleichung der neuen Hyperbel mit denselben Asymptoten:

$$\frac{x^2}{a^2\lambda^2} - \frac{y^2}{b^2\lambda^2} - 1 = 0$$

oder:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \lambda^2 = 0.$$

Aber auch Hyperbeln mit der Gleichungsform:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \lambda^2 = 0$$

haben dieselben Asymptoten. Sie heissen zu der ersten Schaar conjugirt und liegen in den von der ersten Schaar freigelassenen Nebenwinkelräumen der Asymptoten. Die Asymptoten selbst erscheinen dabei als Grenzlinie zwischen beiden Schaaren und somit als ein besonderer Fall der Hyperbel (vergl. § 6 über zerfallende Kurven).

Bemerkung. Man kann auch von den imaginären Asymptoten der Ellipse reden. Alle ähnlich und concentrisch gelegenen Ellipsen haben dieselben Asymptoten. Ihre Gleichungen sind:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \lambda^2 = 0.$$

Die conjugirte Schaar:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \lambda^2 = 0$$

wird imaginär (imaginäre Ellipsen).

Die Formeln für die Brennstrahlen r und r_1 (vergleiche 3) werden für die Hyperbel:

$$r = \pm\left(\frac{e}{a}x - a\right) = \pm\,(\varepsilon x - a)$$

$$r_1 = \pm\left(\frac{e}{a}x + a\right) = \pm\,(\varepsilon x + a)$$

aus denen man unter Hinzuziehung der Leitlinien gleichfalls die Proportionen ableitet:

$$r_1 : \Delta_1 = r : \Delta = e : a = \varepsilon : 1.$$

Also: Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen von einem festen Punkt (einem Brennpunkt) zu den Entfernungen von einer festen Linie (der zugehörigen Leitlinie) in einem constanten Verhältniss stehen, wenn dieses Verhältniss $\frac{e}{a} > 1$ ist.

Definition der Parabel. Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernung von einem festen Punkte (dem Brennpunkte) gleich der Entfernung von einer festen Linie (der Leitlinie) ist. (Fig. 55).

Hiernach kann also die Parabel als Grenzfall zwischen Ellipse und Hyperbel angesehen werden, wenn für die eine und die andere dieser beiden Kurvenarten die numerische Excentricität sich dem Werthe 1 unbegrenzt nähert.

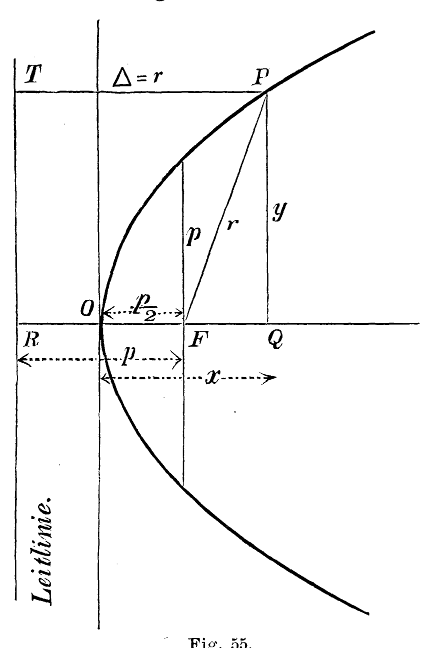


Fig. 55.

Das Lot von F, vom Brennpunkt auf die Leitlinie wird Halbparameter der Parabel $= p$ genannt. Die Gerade, auf welcher dieses Lot liegt, heisst Hauptachse der Parabel. Dass die Mitte O (von RF) sich auf der Parabel befindet, geht sofort aus obiger Definition hervor; diese Mitte ist der Scheitel der Parabel und die Parallele durch ihn zur Leitlinie ist die Scheiteltangente.

Die Parabel hat keinen Mittelpunkt oder besser: ihr Mittelpunkt liegt unendlich fern. Bei der Ellipse und Hyperbel bilden nämlich die Scheitel der grossen, beziehungsweise der reellen Achse, ein Brennpunkt und der Fusspunkt der zugehörigen Leitlinie vier harmonische Punkte, und da hier der eine Scheitel in der Mitte der letztgenannten

Punkte liegt, so muss der andere Scheitel und also auch der Mittelpunkt unendlich fern sein.

Die Gleichung der Parabel erhält die einfachste Gestalt, wenn man weder F noch R, sondern den Scheitel O zum Anfangspunkt macht, und die Hauptachse als eine Achse (hier die x-Achse, Anfangsrichtung von O nach F), die Scheiteltangente als andere Achse des Koordinatenkreuzes nimmt. Dann wird nach Einführung des laufenden Punktes $P(x, y)$:

$$r = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$\triangle = x + \frac{p}{2}.$$

Die Bedingung:

$$r = \triangle \text{ oder } r^2 - \varDelta^2 = 0$$

giebt daher:

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0$$

oder:

$$\boldsymbol{y^2 - 2px = 0} \qquad 8)$$

als Scheitelgleichung der Parabel.

Setzt man $x = \frac{p}{2}$, so wird $y = p$, also ist p auch hier wie bei Ellipse und Hyberbel gleich dem Lot im Brennpunkt. Aus der Form der Gleichung ist zu schliessen, dass x nur positiv sein kann und dass der absolute Werth von y gleichzeitig mit dem von x wächst, aber durchaus nicht gleichmässig. Von $x = 0$ an nimmt y zuerst sehr rasch zu, dann aber langsamer und langsamer, so dass die Richtung, in welcher die Parabel (nach oben und unten) in die Unendlichkeit fortschreitet, schliesslich unbegrenzt wenig von der Richtung der Hauptachse abweicht. Es wäre aber falsch, hieraus zu schliessen, dass die Parabel zwischen zwei zur Hauptachse parallelen „Asymptoten" eingeschlossen sei, denn wenn auch y für sehr grosse Werthe von x sehr viel langsamer wächst als x selbst, so ist doch $\lim y = \sqrt{2px} = \infty$ für $x = \infty$.

Ellipse (nebst Kreis als besonderen Fall), Hyberbel und Parabel sind sämmtlich Kurven zweiter Ordnung, und zwar, wie später in aller Strenge nachgewiesen werden wird, die einzigen Arten dieser Kurven (abgesehen von dem Fall des Zerfalles in zwei geraden Linien). Schon hieraus ist zu

schliessen, dass sie sehr viele Eigenschaften und zwar gerade die wichtigsten mit einander gemeinsam haben werden oder doch, dass diese Eigenschaften bei Ellipse, Hyperbel und Parabel sich entsprechen müssen und leicht von der einen auf die andere Kurve übertragbar sind. Nur da werden Unterschiede zu erwarten sein, wo Elemente hinzukommen, die bei der anderen Kurve imaginär sind oder sich in die Unendlichkeit entfernen, und wenn es auch in Ansehung der überaus grossen Bedeutung dieser Kurven angezeigt ist, sie zunächst jede für sich allein hinsichtlich ihren Eigenschaften abzuhandeln, so soll doch schon hier nachdrücklichst auf diesen Zusammenhang hinzugewiesen sein.

Bekanntlich führen Ellipse, Hyperbel und Parabel auch den gemeinsamen Namen „Kegelschnitte", weil sie zuerst als Schnitte eines geraden Kreiskegels aufgefunden worden sind. Der Nachweis, dass unsere Kurven mit diesen Kegelschnitten der alten Mathematik identisch sind, kann zwar erst später analytisch geführt werden, doch wollen wir der grossen Wichtigkeit dieses Satzes vorläufig durch einen rein geometrischen Beweis gerecht werden.

Es sei also MON ein Kreiskegel (Fig. 56), der von einer Ebene „schief", d. h. schief zur Achse geschnitten wird. Die Schnittfigur SS_1 ist augenscheinlich ein Oval, und es ist zu beweisen, dass sie nichts anderes ist als eine Ellipse. Hierzu denke man sich erstens diejenige Kugel innerhalb des schief abgeschnittenen Kegels, der

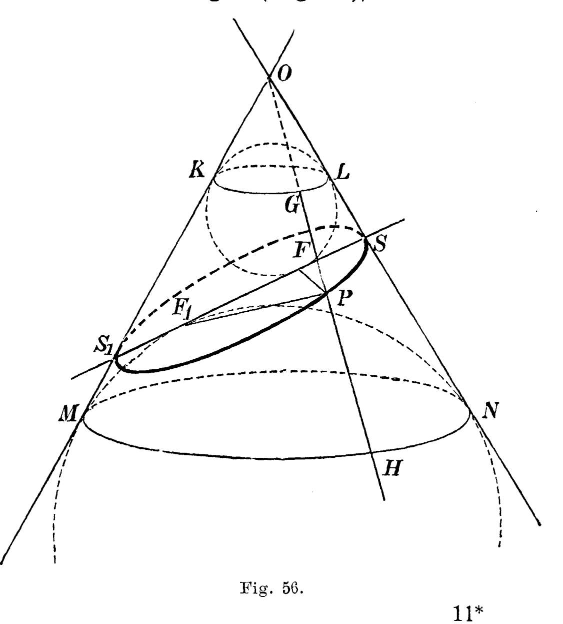


Fig. 56.

diesen längs eines Kreises KL und die schneidende Ebene in F berührt, und zweitens die angeschriebene Kugel, welche den Kegel längs des Kreises MN und die Ebene im Punkte F_1 berührt. Nun verbinde man irgend einen Punkt P der Schnittlinie mit F, F_1 und der Spitze O des Kegels. Dann ist:

$PF = PG$ (als Tangenten von P an die kleine Kugel),

$PF_1 = PH$ (als Tangenten von P an die grosse Kugel),

daher:

$$PF + PF_1 = PG + PH = GH.$$

GH aber ist eine Kante des geraden Kegelstumpfes zwischen den beiden Kreisen KL und MN. Ihre Länge, also auch $PF + PF_1$ ist somit von der Lage des Punktes P ganz unabhängig. q. e. d.

Ist aber die schneidende Ebene zu irgend zwei Kanten des Kegels parallel, so werden diese Kanten erst in der Unendlichkeit getroffen. Die Schnittkurve schliesst sich daher nicht. Ausserdem wird der Scheitelkegel geschnitten, und beide Schnitte machen zusammen eine Hyperbel aus, wie ganz analog bewiesen werden kann. Läuft endlich die Schnittebene parallel zu einer Berührungsebene, d. h. parallel zu nur einer Kegelkante, so wird zwar nur die eine Kegelhälfte geschnitten, aber der Schnitt schliesst sich erst in der Unendlichkeit. Es entsteht eine Parabel.

Aufgaben.

1. Eine Ellipse, deren Hauptachsen auf der x- und y-Achse liegen, geht durch $P_1 (+2, +3)$ und $P_2 (+4, +1)$. Wie lang sind die Halbachsen a und b?

2. In der Ellipsengleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

setze man:

$$x = \frac{2au}{1 + u^2}.$$

Welchen Werth hat dann y?

3. Unter welchem Winkel muss man durch einen Brennpunkt einer gleichseitigen Hyperbel eine Sekante ziehen, damit die abgeschnittene Sehne im Brennpunkt im Verhältniss 1 : 2 getheilt wird.

4. Das von der Mitte einer durch den Brennpunkt einer Parabel gezogenen Sehne auf die Leitlinie gefällte Lot ist halb so gross wie diese Sehne.

---

§ 14.

Die wichtigsten Eigenschaften der Ellipse.

Die Ellipse hat so vielfache Anwendungen gefunden, dass sie nächst der geraden Linie und dem Kreise zweifellos die bekannteste Kurve geworden ist und eine ausführlichere Ableitung ihrer vielen schönen Eigenschaften geboten erscheint.

Die Betrachtung der Ellipse als senkrechte Projektion ihres Scheitelkreises führt sofort zu der folgenden einfachen Konstruktion. Man zeichne den grossen und den kleinen Scheitelkreis (Fig. 57), ziehe einen Radius MP_2P_1, ziehe weiter durch P_1 die Parallele zur y-, durch P_2 die Parallele zur x-Achse, so ist der Schnittpunkt P ein Punkt der Ellipse.

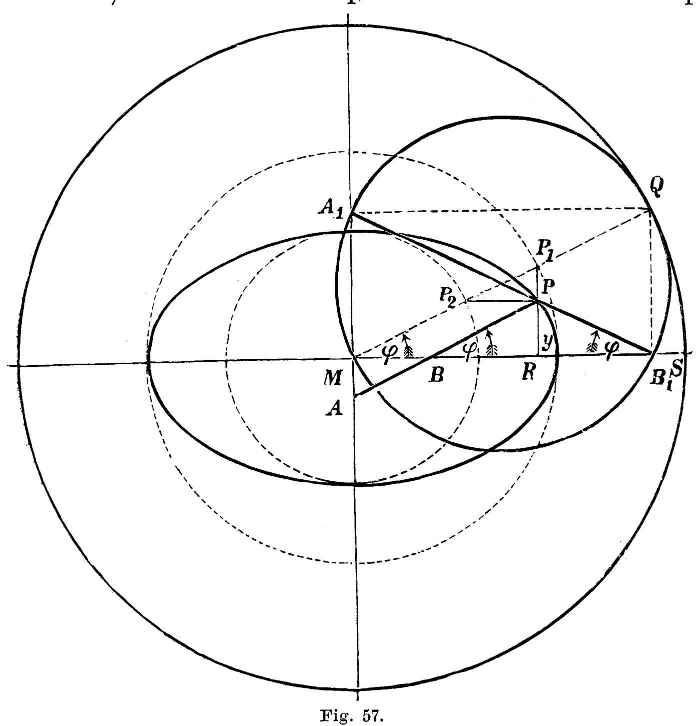


Fig. 57.

Denn, bezeichnet man PR mit y, P_1R mit Y, so folgt:

$$y : Y = MP_2 : MP_1$$

oder:

$$y : Y = b : a,$$

womit nach § 13 die Richtigkeit der Konstruktion erwiesen ist.

Es sei φ der Richtungswinkel des Radius MP_2P_1 (nicht zu verwechseln mit dem Richtungswinkel des Radiusvektor MP nach dem Punkte P der Ellipse), so wird:

$$x = a \cos \varphi, \quad Y = a \sin \varphi,$$

also auch:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos \varphi \\ y &= b \sin \varphi, \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

womit eine sehr einfache Parameterdarstellung der Ellipse gewonnen ist. Mit dem Richtungswinkel $RMP = \psi$ dagegen (in Fig. 57 nicht gezeichnet), gestaltet sich die Parameterdarstellung nicht so einfach. Setzt man noch $MP = r$, also $x = r \cos \psi$, $y = r \sin \psi$, so folgt durch Einsetzung in die Ellipsengleichung:

$$\frac{r^2 \cos^2 \psi}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \psi}{b^2} = 1, \text{ also:}$$

$$r = \frac{a\,b}{\sqrt{b^2 \cos^2 \psi + a^2 \sin^2 \psi}} = a\,b \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 \psi + \sin^2 \psi}{b^2 \cos^2 \psi + a^2 \sin^2 \psi}}$$

$$= a\,b \cdot \sqrt{\frac{1 + m^2}{b^2 + a^2 m^2}} \quad (m = tg\ \psi)$$

und daher:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a\,b \cdot \cos \psi}{\sqrt{b^2 \cos^2 \psi + a^2 \sin^2 \psi}} = \frac{a\,b}{\sqrt{b^2 + a^2 m^2}} \\ y &= \frac{a\,b \cdot \sin \psi}{\sqrt{b^2 \cos^2 \psi + a^2 \sin^2 \psi}} = \frac{a\,b \cdot m}{\sqrt{b^2 + a^2 m^2}} \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

als Parameterdarstellung mit Hilfe des Richtungscoefficienten $m = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \psi$.

Aus der vorhin angegebenen Konstruktion der Ellipse mit Hilfe der beiden Scheitelkreise lässt sich leicht eine andere, noch bequemere ableiten, wenn durch P die Parallele zum Radius MP_2P_1 gezogen wird, welche die grosse Achse in B, die kleine in A schneidet. Aus den beiden Parallelogrammen $MAPP_1$ und $MBPP_2$ ist abzulesen:

$$AP = MP_1 = a.$$

$$BP = MP_2 = b,$$

$$\text{also } AB = AP - BP = a - b.$$

Und hieraus die schöne einfache Konstruktion (Stangenkonstruktion).

Man lasse eine Gerade sich derart bewegen, dass zwei ihrer Punkte, A und B, auf den Hauptachsen bleiben, so beschreibt ein beliebiger Punkt P der Geraden (hier ausserhalb AB, er kann aber auch zwischen A und B liegen) eine Ellipse, deren grosse Halbachse $= AP = a$ und deren kleine $= BP = b$ ist.

Auf dieser Eigenschaft der Ellipse beruht der wohlbekannte „Ellipsenzirkel", der für Ellipsen genau dasselbe leistet, wie der gewöhnliche Zirkel für Kreise. Die nähere Beschreibung kann hier wohl unterbleiben, da die Figur seine Einrichtung skizzenhaft erläutert.

Es giebt aber noch eine andere Stangenkonstruktion der Ellipse, bei welcher der Punkt P zwischen A und B liegt. Um diese zu finden, ziehe man durch P diejenige Gerade A_1B_1, welche gegen die x-Achse dieselbe Neigung hat, wie AB. Dann haben beide Geraden AB und A_1B_1 auch gleiche Neigung gegen die y-Achse und man entnimmt somit aus den beiden gleichschenkligen Dreiecken APA_1 und BPB_1:

$$A_1P = AP = a,$$
$$B_1P = BP = b.$$

Daher:

$$A_1B_1 = a + b,$$

womit die zweite Stangenkonstruktion erwiesen ist.

Diese Stangenkonstruktionen stehen in inniger Beziehung zu einer anderen, sehr merkwürdigen Eigenschaft der Ellipse, insofern sie betrachtet werden kann als eine Cycloide, d. h. als eine beim Rollen eines Kreises auf einem anderen Kreise entstehende Rollkurve. Es gilt nämlich der Satz:

Wenn ein Kreis mit dem Durchmesser $= r$ innerhalb eines Kreises mit dem Radius $= r$ rollt, so beschreibt jeder mit dem rollenden Kreise fest verbundene Punkt P eine Ellipse, deren Halbachsen gleich den Abständen dieses Punktes von dem Endpunkte des durch ihn hindurchgehenden Durchmessers des rollenden Kreises sind. Die Ellipse reducirt sich auf einen doppelt (hin und her) beschriebenen Durchmesser des grossen Kreises, wenn P auf dem Umfang des rollenden Kreises liegt.

Man setze $a + b = r$, schlage über A_1B_1 als Durchmesser den Kreis, der durch M hindurchgehen muss, da $\sphericalangle B_1MA_1 = 90^0$ ist. In diesem Kreise ist MP_2P_1 bis Q verlängert ein zweiter Durchmesser und nun zeichne man den Kreis um M mit $MQ = r$ als Radius. Der Centriwinkel zu dem Bogen QB_1 des kleinen Kreises ist dann $= 2\varphi$, daher:

$$\text{Bogen } QB_1 = \frac{r}{2} \cdot 2\varphi = r \cdot \varphi.$$

Andererseits ist der Centriwinkel zum Bogen QS des grossen Kreises $= \varphi$, daher:

$$\text{Bogen } QS = r \cdot \varphi,$$

folglich:

$$\text{Bogen } QB_1 = \text{Bogen } QS.$$

Lässt man nun den kleinen Kreis in dem grossen rollen, so bleibt diese Gleichung immer bestehen. Der Punkt B_1 ist daher ein fester Punkt des rollenden Kreises und beschreibt somit den Durchmesser MS des ruhenden Kreises. Ebenso ist A_1 ein fester Punkt des rollenden Kreises, der den senkrechten Durchmesser MA_1 durchläuft. Also beschreibt der Punkt P, als fester Punkt zwischen A_1 und B_1, somit auch als ein mit dem rollenden Kreise fest verbundener Punkt nach der Stangenconstruktion eine Ellipse. q. e. d.

Die beiden hier genannten Kreise heissen nach Cardan, der sie zuerst betrachtet haben soll, Cardani'sche Kreise. Auf ihrer Theorie beruht das von dem genialen Leonardo da Vinci erdachte Ovalwerk oder die Ellipsendrehbank, auf welcher man Ellipsen drehen kann, wie auf der gewöhnlichen Drehbank Kreise.

Zu weiteren Untersuchungen über wichtige Eigenschaften der Ellipse leitet die Frage ein:

Wo liegen die Mitten paralleler Sehnen?

Sind die Sehnen parallel zur grossen Achse, so liegen die Mitten offenbar auf der kleinen, sind sie parallel zur kleinen, so auf der grossen Achse. Wenn aber die Sehnen irgend einen Richtungscoefficienten $m = \operatorname{tg}\psi$ haben, wo liegen dann ihre Mitten?

Man schneide die Ellipse durch irgend eine Gerade mit der Gleichung:

$$y = mx + q.$$

Zur Bestimmung der Schnittpunkte setze man in die Gleichung der Ellipse ein. Es folgt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+q)^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ oder:}$$

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) + \frac{2\,m\,x\,q}{b^2} + \frac{q^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei Wurzeln x_1 und x_2, entsprechend den beiden Durchschnittspunkten. Uns interessirt aber hier die Mitte N (ξ, η), also brauchen wir nach 3 a) § 5 nur $\xi = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Liegt nun eine quadratische Gleichung

$$A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0$$

vor, so ist bekanntlich:

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}, \quad \left(x_1 x_2 = +\frac{C}{A}\right)$$

also hier:

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{m\,q\,a^2}{b^2 + a^2\,m^2}.$$

Da die Mitte N auch auf der Sehne $y = mx + q$ liegt, so folgt sofort:

$$\eta = m\,\xi + q = \frac{q\,b^2}{b^2 + a^2\,m^2}.$$

Wollen wir nun die Mitten a l l e r parallelen Sehnen haben, so ist m unverändert zu lassen und q zu variiren. Der geometrische Ort dieser Mitten geht daher durch Elimination von q aus den eben abgeleiteten Ausdrücken für ξ und η hervor, was sofort durch Division erreicht wird. Man erhält:

$$\frac{\eta}{\xi} = -\frac{b^2}{m\,a^2}, \quad \eta = -\frac{b^2}{ma^2} \cdot \xi.$$

Dies ist die Gleichung einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden. Daher:

D i e M i t t e n p a r a l l e l e r S e h n e n l i e g e n s t e t s a u f e i n e m D u r c h m e s s e r.

Der Richtungscoefficient m_1 desselben ist

$$m_1 = -\frac{b^2}{m\,a^2}$$

woraus

$$m \cdot m_1 = -\frac{b^2}{a^2}. \qquad \textbf{3)}$$

Werden nunmehr auch zu diesem Durchmesser parallele Sehnen gezogen, so liegen die Mitten derselben, wie aus der Symmetrie der Gleichung 3) folgt, auf dem zur ersten Schaar parallelen Durchmesser. Man nennt beide Durchmesser einander conjugirt. Also:

Zwei conjugirte Durchmesser sind zwei solche Durchmesser, von denen jeder alle diejenigen Sehnen halbirt, welche zum anderen Durchmesser parallel sind. Aus 9) § 2 ersieht man sofort weiter: Ordnet man jedem Durchmesser den ihm conjugirten Durchmesser zu, so entsteht ein involutorisches Strahlenbüschel, in welchem die Hauptachsen das senkrecht auf einander stehende Paar bilden.

Geht man von den Durchmessern der Ellipse zu denjenigen Durchmessern des Scheitelkreises über, deren Projektionen sie sind, bezeichnet die Richtungswinkel mit φ und φ_1, und die zugehörigen Coefficienten mit μ und μ_1, so folgt: $m = \frac{y}{x}$, $\mu = \frac{Y}{x}$, also $m : \mu = y : Y = b : a$ (s. S. 155), daher:

$$m = \frac{b}{a} \cdot \mu \text{ und ebenso } m_1 = \frac{b}{a} \cdot \mu_1.$$

Dies in 3) eingesetzt, giebt:

$$\mu \cdot \mu_1 = -1,$$

d. h. conjugirte Durchmesser der Ellipse sind Projektionen senkrechter Durchmesser des Kreises. Selbstverständlich sind im Kreise senkrechte Durchmesser zugleich conjugirte Durchmesser und da bei jeder Parallelprojektion die Projektion einer Mitte zugleich Mitte der Projektion ist, so wäre hier ein vielleicht noch bequemerer Ausgangspunkt für die vorliegende Theorie gewesen.

Da die Gleichung 3) nur das Verhältniss $\frac{b}{a}$ enthält, so sind conjugirte Durchmesser einer Ellipse zugleich conjugirte Durchmesser jeder concentrischen und ähnlich liegenden Ellipse. Und hieraus fliesst wieder der Satz:

Die beiden Stücke einer zwei concentrische und ähnliche Ellipsen schneidenden Sekante zwischen den Ellipsen sind einander gleich. (Denn die Mitten der Sehnen müssen zusammenfallen, da sie auf demselben conjugirten Durchmesser liegen.)

Es seien (Fig. 58) $OP = a'$, $OP_1 = b'$ zwei conjugirte Halbmesser. ($P(x, y)$, $P_1(x_1, y_1)$.)

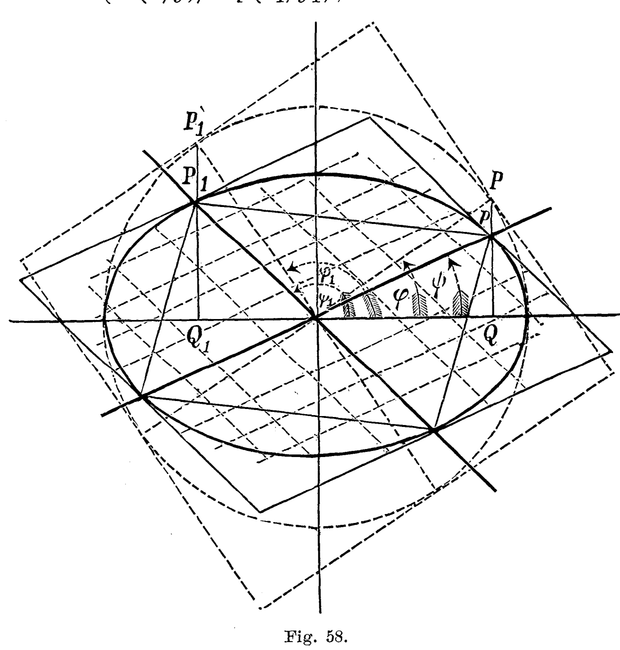


Fig. 58.

Dann ist (nach 1):

$$x = a \cos \varphi, \quad x_1 = a \cos \varphi_1,$$
$$y = b \sin \varphi, \quad y_1 = b \sin \varphi_1.$$

Da aber $\varphi_1 = \varphi + 90^0$, so folgt auch:

$$x_1 = - a \sin \varphi$$
$$y_1 = b \cos \varphi.$$

Hieraus:

$$a'^2 = x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi$$
$$b'^2 = x_1^2 + y_1^2 = a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi,$$

daher:

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2, \tag{4}$$

d. h. die Summe der Quadrate conjugirter Halbmesser ist constant.

Ferner nach 8) § 5:

$$\varDelta\, OPP_1 = \frac{xy_1 - yx_1}{2} = \frac{a\,b \cos^2 \varphi + a\,b \sin^2 \varphi}{2} = \frac{a\,b}{2}. \tag{5}$$

Das betrachtete Dreieck ist der vierte Theil des Parallelogramms mit den Diagonalen $2a'$ und $2b'$, daher:

Alle Parallelogramme, deren Diagonalen conjugirte Durchmesser sind, haben gleichen Flächeninhalt $= 2ab$. (Sie sind die grössten Vierecke, welche einer Ellipse einbeschrieben werden können und Projektionen von Quadraten im Kreise).

Betrachten wir eine Schaar paralleler Sekanten der Ellipse. Die Mitten der Sehnen liegen auf dem conjugirten Durchmesser und dies bleibt wahr, wie nahe auch die beiden Schnittpunkte kommen; es bleibt auch wahr, wenn die beiden Schnittpunkte zusammenfallen und aus der Sekante eine Tangente wird. Also:

Die Tangente in einem Punkt der Ellipse ist zum conjugirten Durchmesser parallel (d. h. parallel zu demjenigen Durchmesser, der zu dem durch diesen Punkt gehenden Durchmesser conjugirt ist). Für den Kreis erhält dieser Satz die bekannte Form, dass die Tangente auf dem Radius im Berührungspunkte senkrecht steht.

Zieht man in den Endpunkten zweier conjugirter Durchmesser die vier Tangenten, so entsteht ein der Ellipse umbeschriebenes Parallelogramm von constantem Flächeninhalt $= 4ab$. Es ist die Projektion eines dem Kreise umschriebenen Quadrates und von kleinerem Inhalt wie jedes andere der Ellipse umschriebene Viereck.

Ableitung der Gleichung der Tangente. (Fig. 59).

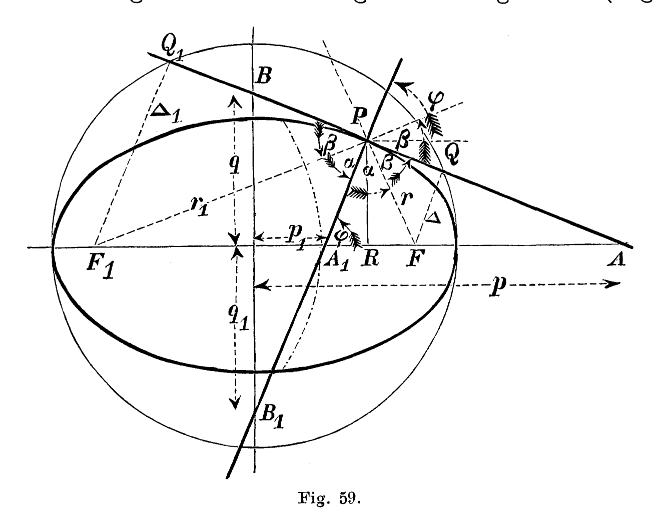


Fig. 59.

Es seien $P(x, y)$ der Berührungspunkt und (X, Y) die Koordinaten des laufenden Punktes der Tangente. Der Richtungscoefficient des Durchmessers MP (nicht gezeichnet) ist:

$$m = \operatorname{tg} \psi = \frac{y}{x},$$

also ist (nach 3)) derjenige des conjugirten Durchmessers und somit auch der Tangente:

$$m_1 = -\frac{b^2}{a^2 m} = -\frac{b^2 x}{a^2 y},$$

und daher die Gleichung der Tangente:

$$\frac{Y - y}{X - x} = m_1 = -\frac{b^2 x}{a^2 y},$$

oder nach leichten Reduktionen:

$$\frac{X \cdot x}{a^2} + \frac{Y \cdot y}{b^2} - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 0$$

und endlich, da $P(x, y)$ auf der Ellipse liegt:

$$\frac{X \cdot x}{a^2} + \frac{Y \cdot y}{b^2} - 1 = 0. \qquad 6)$$

Das überaus durchsichtige Bildungsgesetz dieser Gleichung der Tangente zeigt schon in der äusseren Form die innige Beziehung zur Ellipse an. Nach 1a) § 9 erhält man sofort die Stücke p und q, welche durch sie auf den Achsen abgeschnitten werden:

$$p = \frac{a^2}{x}, \quad q = \frac{b^2}{y}, \quad \text{also } a^2 = px, \quad b^2 = qy.$$

Die Anwendung von 12) § 1 liefert daher den schönen Satz:

Die beiden Scheitel S und S_1 der grossen Achse, der Fusspunkt R des vom Berührungspunkt gefällten Lotes und der Schnittpunkt A der Tangente mit der (verlängerten) grossen Achse bilden vier harmonische Punkte, ebenso wie natürlich die Scheitel der kleinen Achse, der Fusspunkt des auf sie vom Berührungspunkte gefällten Lotes und der entsprechende Schnittpunkt mit der Tangente.

Ableitung der Gleichung der Normale. (Fig. 59).

Normale in einem Punkt einer Kurve heisst das in diesem Punkt auf der Tangente errichtete Lot. Ihr Richtungscoefficient ist hier nach 3a) § 2 $= -\frac{1}{m_1} = +\frac{a^2 y}{b^2 x}$. Versteht

man daher jetzt unter (X, Y) die Koordinaten eines Punktes der Normale, so folgt die Gleichung dieser Linie:

$$\frac{Y-y}{X-x}=\frac{a^2y}{b^2x}$$

oder nach kleineren Reduktionen

$$X\cdot ya^2 - Y\cdot xb^2 - xye^2 = 0.$$

Die Stücke p_1 und q_1 welche die Normale von der Achse abschneidet, sind daher:

$$p_1 = \frac{x\cdot e^2}{a^2}$$

$$q_1 = -\frac{y\cdot e^2}{b^2}.$$

Da q_1 das entgegengesetzte Zeichen von y hat, so leuchtet ein, dass die Normale a, von P aus gerechnet, erst die grosse, dann die kleine Achse schneidet. (Siehe Figur.)

Für die Abschnitte der Tangente waren vorhin die Formeln gefunden worden:

$$p=\frac{a^2}{x},\quad q=\frac{b^2}{y}.$$

Daher:

$$p\cdot p_1 = e^2.$$

Wendet man nun abermals 12) § 1 an, so folgt:

Die beiden Brennpunkte und die Durchschnittspunkte der Tangente und der Normale mit der grossen Achse sind vier harmonische Punkte.

Werden diese von P aus projicirt, so folgt weiter:

Die beiden Brennstrahlen nach einem Punkt der Ellipse bilden mit der Tangente und der Normale in diesem Punkt vier harmonische Strahlen.

Und da Tangente und Normale senkrecht aufeinander stehen, so folgt endlich nach Seite 46 der so wichtige Satz:

Die von den Brennstrahlen gebildeten Winkel werden von der Tangente und Normale halbirt. (Augenscheinlich ist es der Innenwinkel, welcher von der Normale und der Aussenwinkel, welcher von der Tangente halbirt wird).

Dieser Satz erklärt die Bezeichnung von F und F_1 als „Brennpunkt“. Denken wir uns die Ellipse als Spiegel und in F einen leuchtenden Punkt, der überallhin Strahlen aussendet, so müssen alle Strahlen sich im anderen Brennpunkt

F_1 wieder vereinigen, da bekanntlich stets der Einfallswinkel = dem Reflektionswinkel ist.[1])

Es verhält sich:

$$A_1P : B_1P = A_1R : x$$
$$= x - p_1 : x$$
$$= x - \frac{e^2}{a^2} x : x,$$

also zuletzt:

$$A_1P : B_1P = b^2 : a^2,$$

d. h.: Wie auch der Punkt P auf der Ellipse angenommen wird, die Länge der Normale bis zur kleinen Achse verhält sich stets zur Länge derselben Normale bis zur grossen Achse wie a^2 zu b^2.

Es ist ferner:

$$A_1P = \sqrt{y^2 + (x-p)^2} = \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + x^2 \frac{b^4}{a^4}}$$
$$= \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{e^2}{a^2} x^2} = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{\left(a - \frac{e}{a}x\right)\left(a + \frac{e}{a}x\right)},$$

also nach 5) § 13:

$$A_1P = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{rr_1}$$

und daher nach dem vorigen Satz:

---

[1]) In dem Dreieck A_1PF ist:

$$\sin\varphi : \sin\alpha = FP : A_1F = a - \frac{e}{a}x : e - \frac{ex}{a^2}$$

oder:

$$\sin\varphi : \sin\alpha = a : e = n : 1, \text{ wenn } n = \frac{1}{\varepsilon} \text{ gesetzt wird.}$$

Denken wir uns daher (von rechts) ein zur Hauptachse paralleles Strahlenbüschel von einem unendlich fernen leuchtenden Punkt herkommend und die Ellipse aus Glas, dessen Brechungsexponent n = dem reciproken Werth der Excentricität sei, so werden durch die Brechung alle Strahlen im linken Brennpunkt F_1 vereinigt. Wird von der Ellipse durch einen zu F_1 concentrischen Kreis (in Fig. 59 angedeutet) eine Linse abgeschnitten, so findet beim Durchgang vom Glas zur Luft in der Kugelfläche wegen des senkrechten Auffallens keine Brechung mehr statt. Und so wäre hier das Ideal einer Brennlinse, wenn nicht den verschiedenen Farben verschiedene Werthe von n entsprächen und daher eine solche Linse nur für eine Wellenlänge des Lichtes passen könnte. Da es ausserdem nicht möglich ist, Glas vollkommen elliptisch zu schleifen, so hat die schöne von Cartesius gemachte Entdeckung dieser Eigenschaft elliptisch geformter Linsen bisher leider keine praktischen Folgen gehabt.

$$B_1P = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{rr_1},$$

und somit:

$$A_1P \cdot B_1P = r \cdot r_1.$$

Das Produkt der genannten Normalen ist = dem Produkt aus den Brennstrahlen. (Ebenso gross ist auch das Produkt aus den Abschnitten der Tangenten $AP \cdot BP$.)

Schliesslich wollen wir noch die Projektionen A_2P und B_2P der Normalen auf einen Brennstrahl berechnen, wobei es ganz gleichgiltig ist, welchen Brennstrahl man nimmt. (A_2 und B_2 in Fig. 59 nicht gezeichnet.) Es ist:

$$A_2P = A_1P \cdot \cos \alpha = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{rr_1} \cdot \cos \alpha.$$

Aus dem Dreieck FF_1O folgt aber sofort nach dem Halbwinkelsatz:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{(r + r_1 + 2e)(r + r_1 - 2e)}{4rr_1}} = \frac{b}{\sqrt{rr_1}},$$

daher:

$$A_2P = \frac{b^2}{a} = p,$$

und ebenso:

$$B_2P = A_2P \cdot \frac{a^2}{b^2} = a.$$

Also: Die Projektion einer Normalen auf einen Brennstrahl ist $= p$ oder $= a$, je nachdem die Normale vom Berührungspunkt bis zum Schnitt mit der grossen oder kleinen Achse genommen wird.

Diesen Sätzen über die Normale entspricht eine grosse Zahl von geometrischen Eigenschaften der Ellipsentangente. Fällt man von F und F_1 die Lote Δ und Δ_1 auf dieselbe, so ist:

$$\Delta = r \cos \alpha = \frac{rb}{\sqrt{rr_1}}$$

$$\Delta_1 = r_1 \cos \alpha = \frac{r_1 b}{\sqrt{rr_1}}.$$

Daher:

$$\Delta \cdot \Delta_1 = b^2,$$

d. h. das Produkt der beiden von den Brennpunkten auf eine Tangente gefällten Lote ist $= b^2$, also constant. Werden Δ und Δ_1 über den Fusspunkt hinaus um sich selbst bis F' und F'_1 verlängert (nicht gezeichnet), so müssen in Folge der Gleichheit der Winkel FPQ und F_1PQ_1 diese beiden Punkte F' und F'_1 auf den Verlängerungen der Brennstrahlen liegen, und es folgt:

$$FF'_1 = FP + PF'_1 = FP + PF_1 = 2a,$$

und ebenso:

$$F_1F' = 2a,$$

d. h. sieht man die Tangente als Spiegel an, so ist das Bild eines Brennpunktes von dem andern Brennpunkt um die grosse Achse entfernt. Beachtet man, dass M Mitte von FF_1 und Q Mitte von FF' ist, so folgt sofort:

$$MQ = \frac{1}{2} F_1F' = a = MQ_1,$$

also: Die Fusspunkte Q und Q_1 der von den Brennpunkten auf die Tangente gefällten Lote liegen auf dem grossen Scheitelkreis.

Dieser Satz kann zu einer sehr einfachen Tangentenconstruktion benutzt werden. Man zeichne den Scheitelkreis und drehe einen rechten Winkel so, dass der eine Schenkel beständig durch einen festen Punkt innerhalb des Kreises (den einen Brennpunkt) hindurchgeht, während der Scheitel auf dem Scheitelkreis bleibt. Dann umhüllt der andere Schenkel die Ellipse. [Vergleiche hierzu die allgemeinen Bemerkungen des § 11.]

Die beiden von einem Punkt Q ausserhalb der Ellipse gezogenen Tangenten (Fig. 60) sind mit Hilfe der vorhin genannten Spiegelungen der Brennpunkte leicht zu construiren.

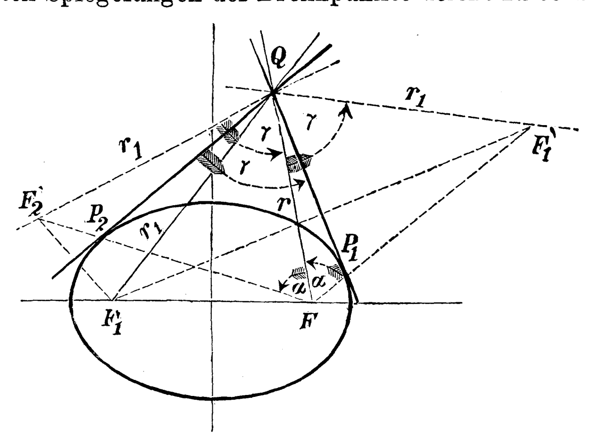


Fig. 60.

Hierzu schlage man um F mit $2a$ und um Q mit QF_1 als Radius Kreise, die sich in F'_1 und F'_2 schneiden, dann sind

die Mittellote auf $F_1F'_1$ und $F_1F'_2$ die gesuchten Tangenten, während die Berührungspunkte P_1 und P_2 mit den Schnittpunkten von FF'_1 und FF'_2 mit diesen Tangenten zusammenfallen.

Aus dieser Konstruktion folgt:

$\triangle FQF'_1 \cong \triangle FQF'_2$ (dritter Congruenzsatz).

Daher:

$$\sphericalangle QFF'_1 = \sphericalangle QFF'_2,$$

oder:

$$\sphericalangle QFP_1 = \sphericalangle QFP_2.$$

Also: Zwei von demselben Punkte Q ausgehende und bis zu dem Berührungspunkte genommene Tangenten erscheinen von einem Brennpunkt aus gesehen unter gleichem Sehwinkel.

Die Gleichheit der beiden Winkel bei F'_1 und F'_2 in den genannten Dreiecken giebt denselben Satz für den andern Brennpunkt. Es bleibt daher noch:

$$\sphericalangle FQF'_1 = \sphericalangle FQF'_2,$$

oder:

$$\sphericalangle F'_1QP_1 + \sphericalangle P_1QF = \sphericalangle FQP_2 + \sphericalangle P_2QF'_2.$$

Der erstgenannte Winkel ist aber (da QP_1 Mittelsenkrechte des Dreiecks $F_1QF'_1$) gleich dem Winkel P_1QF_1, und ebenso ist $\sphericalangle P_2QF'_2 = \sphericalangle F_1QP_2$. Daher nach Abzug des Winkels F_1QF und Division durch 2:

$$\sphericalangle P_1QF_1 = \sphericalangle FQP_2.$$

Also: Die eine Tangente bildet mit dem einen Brennstrahl denselben Winkel, wie der andere Brennstrahl mit der anderen Tangente. Oder auch: Halbirt man den Winkel zwischen zwei Tangenten, so werden auch die Winkel der beiden nach dem Schnittpunkt gezogenen Brennstrahlen halbirt.

Schliesslich folgt noch:

$$\sphericalangle P_1QP_2 = \sphericalangle F'_1QF = \sphericalangle FQF'_2 = \gamma.$$

Damit ist eine sehr einfache Herleitung der Formel für diese Winkel durch die Koordinaten (x, y) des Durchschnittspunkts Q gegeben. Es ist

$$\cos\gamma = \frac{r^2 + r_1^2 - 4a^2}{2rr_1}.$$

Nun ist

$$r^2 = y^2 + (x-e)^2,\ r^2_1 = y^2 + (x+e)^2,$$

daher:

$$\cos\gamma = \frac{x^2 + y^2 - a^2 - b^2}{\sqrt{y^2 + (x-e)^2}\cdot\sqrt{y^2 + (x+e)^2}}.$$

Stehen im besonderen die Tangenten senkrecht aufeinander, so ist $\cos \gamma = 0$ und daher:

$$x^2 + y^2 - (a^2 + b^2) = 0,$$

d. h. wird ein rechter Winkel so um eine Ellipse herumgeführt, dass seine Schenkel sie beständig berühren, so beschreibt der Scheitel um den Mittelpunkt der Ellipse einen Kreis mit dem Radius $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Wie die hier abgeleiteten, zahlreichen ausgezeichneten Eigenschaften der Ellipse beweisen, spielen dabei die Brennpunkte eine wesentlichere Rolle als der Mittelpunkt. Punkt und Tangente der Ellipse haben keine unmittelbare Beziehung zum Mittelpunkt, wohl aber zu den Brennpunkten. Diese merkwürdigen, durch ihre Lage an sich gar nicht hervortretenden Punkte, sind eben innig mit vielen Eigenschaften verknüpft, welche die Ellipse erst „erschliessen“, indem sie den geometrischen Charakter dieser Kurve hervortreten lassen. Zu einer letzten, freilich tief versteckten und gar nicht realen, weil auf das Imaginäre sich beziehenden Eigenschaft der Brennpunkte führt nun folgende Aufgabe:

Gegeben ein Punkt $Q\ (X, Y)$ ausserhalb der Ellipse. Gesucht die Richtungsconstanten der beiden durch Q hindurchgehenden Tangenten.

Wir wollen diese Untersuchung rein analytisch und von vorn anfangend durchführen, trotzdem die letzten Sätze sofort eine leichte Lösung gestatten. Zieht man durch $Q\ (X, Y)$ irgend eine Gerade mit dem Richtungscoefficienten m und führt auf ihr den laufenden Punkt $P\ (x, y)$ ein, so ist die Gleichung dieser Geraden:

$$\frac{y - Y}{x - X} = m,$$

oder:

$$y = Y + m\ (x - X).$$

Wird der Durchschnitt mit der Ellipse verlangt, so setze man diesen Werth für y in die Gleichung der Ellipse ein. Es folgt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(Y + m\ (x - X))^2}{b^2} - 1 = 0,$$

oder:



$$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)+2x\,\frac{mY-m^2X}{b^2}+\frac{(Y-mX)^2}{b^2}-1=0.$$

Soll nun die Gerade zur Tangente werden, so muss diese Gleichung zwei gleiche Werthe für x liefern. Das giebt die Bedingung:

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\left(\frac{(Y-mX)^2}{b^2}-1\right)-m^2\left(\frac{Y-mX}{b^2}\right)^2=0,$$

oder auch:

$$(Y-mX)^2-b^2-a^2m^2=0,$$

oder:

$$m^2(a^2-X^2)+2mXY+(b^2-Y^2)=0.$$

Diese quadratische Gleichung für m bestimmt die Richtungscoefficienten der beiden von Q gezogenen Tangenten. Setzt man für $Q\,(X, Y)$ einen Punkt innerhalb der Ellipse, so werden die beiden m imaginär, z. B. für den Mittelpunkt $(X=0,\ Y=0)$ folgt:

$$m^2a^2+b^2=0,\ m=\pm i\frac{b}{a}$$ (Richtungscoefficienten der imaginären Asymptoten).

Setzt man aber für $Q\,(X, Y)$ einen Brennpunkt, also $X=\pm e$, $Y=0$, so wird die Gleichung:

$$m^2+1=0,\ m=\pm i,$$

d. h. die Tangenten von den Brennpunkten an die Ellipse sind Nulllinien.

Anmerkung: Diese Eigenschaft der Brennpunkte hat Anlass gegeben, diese Punkte auch auf andere Kurven zu übertragen, derart, dass unter Brennpunkten einer Kurve solche Punkte verstanden werden, dass die beiden durch sie hindurchgehenden Nulllinien Tangenten sind. Wie eine solche Betrachtung, trotzdem sie sich auf imaginäre Elemente bezieht, zuweilen da Aufklärung geben kann, wo sonst eine solche schwer zu erlangen ist, wollen wir an folgendem Beispiel erläutern:

Aufgabe: Die Gleichung der allgemeinen Fusspunktkurve der Ellipse abzuleiten.

Unter Fusspunktkurve einer anderen Kurve versteht man den geometrischen Ort der Fusspunkte aller Lote, welche von einem festen Punkte auf sämmtliche Tangenten der letzteren Kurve gefällt worden sind. Es sei $P(\xi, \eta)$ dieser Punkt, l eine Tangente, $Q(x, y)$ der Berührungspunkt, $R(X, Y)$

der Fusspunkt. Dann bestehen zunächst folgende drei Gleichungen:

$$\text{I)}\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\text{II)}\ \frac{X \cdot x}{a^2} + \frac{Y \cdot y}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{Y - \eta}{X - \xi} = -\frac{a^2 y}{b^2 x}, \text{ oder:}$$

$$\text{III)}\ \frac{x}{a^2}(Y - \eta) - \frac{y}{b^2}(X - \xi) = 0.$$

I sagt uns, dass $Q(x, y)$ auf der Ellipse, II) dass R auf der Tangente in Q liegen soll, während III die Bedingung des Senkrechtstehens darstellt. Die Aufgabe verlangt die Gleichung der Fusspunktkurve, folglich sind aus I), II), III) noch x und y, die Koordinaten des Berührungspunktes zu eliminiren. Aus II) und III) ergiebt sich aber durch Berechnung von x und y:

$$x = \frac{a^2(X - \xi)}{X(X - \xi) + Y(Y - y)},\ y = \frac{b^2(Y - \eta)}{X(X - \xi) + Y(Y - \eta)}$$

in I) eingesetzt entsteht nach Fortschaffung des Nenners die Gleichung der gesuchten Fusspunktkurve:

$$(X(X - \xi) + Y(Y - \eta))^2 - [a^2(X - \xi)^2 + b^2(Y - \eta)^2] = 0.$$

Bemerkungen: 1. Die Fusspunktkurve ist, wie man sieht, im allgemeinen eine Kurve vierter Ordnung. Lässt man $P(\xi, \eta)$ mit dem Mittelpunkt zusammenfallen, so wird die Gleichung:

$$(X^2 + Y^2)^2 - (a^2 X^2 + b^2 Y^2) = 0.$$

Es erscheint als selbstverständlich, dass eine Fusspunktkurve nur ausserhalb der Ellipse laufen kann. Da aber hier, wie ein Blick auf die Gleichung lehrt, auch der Anfangspunkt, also hier der Mittelpunkt, auf der Kurve liegt, so ist scheinbar ein Widerspruch vorhanden, der wohl stutzig machen kann. Er wird folgendermassen gelöst: Wenn $P(\xi, \eta)$ ein Punkt ausserhalb der Ellipse ist, so geht die Fusspunktkurve zweimal durch ihn hindurch, da dann für jede der beiden durch P hindurchgehenden Tangenten der Fusspunkt mit P selbst zusammenfällt. Liegt P aber innerhalb, so werden diese Tangenten imaginär; nichtsdestoweniger bleibt doch der Fusspunkt des auf sie gefällten Lotes, nämlich P selbst reell und

auf diese Weise erklärt es sich, dass seine Koordinaten stets der Gleichung genügen. Aber dann steht P in gar keiner Verbindung mit dem übrigen reellen „Zug“ der Kurve, er ist ein „Einsiedler“ oder isolirter Punkt. (Vergleiche das Beispiel der Conchoide in § 6.)

2. Es falle P mit einem Brennpunkt zusammen, also $\xi = e$, $\eta = 0$, dann wird die Gleichung der Fusspunktkurve:

$$(X(X-e)+Y)^2-(a^2(X-e)^2+b^2Y^2)=0.$$

Sie ist also auch eine Kurve vierter Ordnung; soll aber andererseits, wie vorhin gezeigt, in diesem Falle ein Kreis, nämlich der Scheitelkreis: $x^2+y^2-a^2=0$ sein! Wie ist nun dieser Widerspruch zu lösen?

Nur durch die beiden Tangenten, welche durch den Brennpunkt hindurchgehen und, wie gezeigt, Nulllinien sind. Eine Nulllinie aber steht auf sich selbst senkrecht, d. h. das von einem auf ihr liegenden Punkte auf sie gefällte Lot fällt mit ihr zusammen und der Fusspunkt kann irgendwo auf ihr angenommen werden. Mithin muss für einen Brennpunkt die Fusspunktkurve diese beiden Linien, welche die Gleichungen:

$$(X-e)+iY=0 \text{ und } (X-e)\,iY=0,$$

oder vereint die Gleichung:

$$(X-e)^2+Y^2=0$$

haben, als einen Theil in sich enthalten, d. h. $(X-e)^2+Y^2$ muss ein Faktor der linken Seite sein. Und der andere Faktor? Dieser wird eben den Scheitelkreis geben und daher mit $X^2+Y^2-a^2$ zusammenfallen.

In der That kann man a posteriori dies leicht bestätigen. Denn wird $b^2=a^2-e^2$ gesetzt, so findet sich mit leichter Mühe die Identität:

$$(X(X-e)+Y^2)^2-a^2(X-e)^2-(a^2-e^2)Y^2$$
$$\equiv[(X-e)^2+Y^2]\,[X^2+Y^2-a^2].$$

3. Diese Aufgabe ist sehr lehrreich auch nach folgender Seite hin: Gesetzt, Jemand, dem es unbekannt wäre, dass für einen Brennpunkt die Fusspunkte der auf die Tangenten gefällten Lote auf dem Scheitelkreise liegen, wollte rein analytisch den Ort dieser Fusspunkte ableiten, so würde er gleich uns unweigerlich zu der vorigen Gleichung:

$$(X(X-e)+Y^2)^2-(a^2(X-e)^2+Y^2)=0$$

gelangen und daraus schliessen, dass diese Kurve von der

vierten Ordnung sei; dass dieselbe zerfällt, würde er schwerlich dieser Gleichung ansehen und sich daher ein ganz falsches Bild von der Kurve machen. Es tritt hier eben auch ein „überflüssiger Faktor", nämlich $(X - e)^2 + Y^2$ auf, aber nicht durch ungeschicktes Verfahren bei der Elimination, sondern weil dieser Faktor eine, wenn auch auf imaginäre Elemente sich beziehende Bedeutung besitzt.

Aufgaben.

1. Aus der Gleichung:

$$\pm \sqrt{b} \cdot \sqrt{a - x} \pm \sqrt{b} \cdot \sqrt{a + x} \pm \sqrt{2a} \cdot \sqrt{b - y} = 0$$

sind die Wurzeln fortzuschaffen. Welche Kurve wird dann erhalten?

2. Es ist die Gleichung des Kreises aufzustellen, der die Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

in zwei zur grossen Achse symmetrischen Punkten mit der Abscisse x_0 berührt.

3. Gegeben zwei Kreise (deren Centrale zur x-Achse genommen wird). Gesucht der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Summe oder die Differenz der Tangenten an die beiden Kreise constant ist. (Erweiterung der Brennpunktseigenschaften der Ellipse (und Hyperbel).

4. Der geometrische Ort der Mitten aller durch einen beliebigen Punkt $P(x_0 y_0)$ gehenden Sehnen einer Ellipse ist eine zu dieser ähnliche und ähnlich gelegene Ellipse.

---

§ 15.

Die wichtigsten Eigenschaften der Hyperbel.

Wie schon früher betont, können sehr viele Eigenschaften der Ellipse ohne weiteres auf die Hyperbel übertragen werden; nur werden einige ausfallen, weil gewisse Elemente oder Grössen imaginär werden, während andererseits andere Eigenschaften aus dem umgekehrten Grunde neu hinzutreten.

Gehen wir daher zunächst die im vorigen § entwickelten Sätze über die Ellipse durch, um zu sehen, wie sie sich für die Hyperbel gestalten.

Zunächst ist letztere keine senkrechte Projektion des

Scheitelkreises, also fehlen die Parameterdarstellung 1), die Stangenkonstruktionen und die Konstruktion mittelst der kardanischen Kreise. Dafür aber kann man hier eine ähnliche Parameterdarstellung wie folgt ableiten.

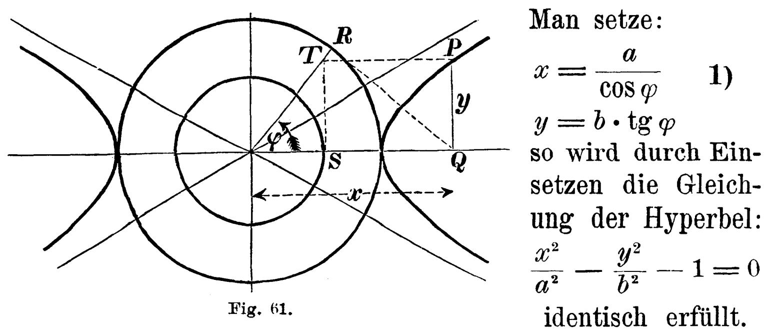


Fig. 61.

Man setze:

$$x = \frac{a}{\cos\varphi} \qquad \textbf{1)}$$
$$y = b \cdot \operatorname{tg}\varphi$$

so wird durch Einsetzen die Gleichung der Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

identisch erfüllt.

Und damit ist folgende Konstruktion gegeben (Fig. 61):

Man zeichne den Scheitelkreis und zur y-Achse im Abstande b die Parallele. Dann ziehe man unter dem Winkel φ einen Radius, der den Kreis in R und die Parallele in T schneidet, bestimme den Schnittpunkt Q der Tangente in R mit der x-Achse und ziehe durch Q die Parallele zur y-Achse, durch T die Parallele zur x-Achse, so ist der Schnittpunkt ein Punkt P der Hyperbel.

Die Theorie der conjugirten Durchmesser der Hyperbel kann genau so entwickelt werden, wie bei der Ellipse. Sind

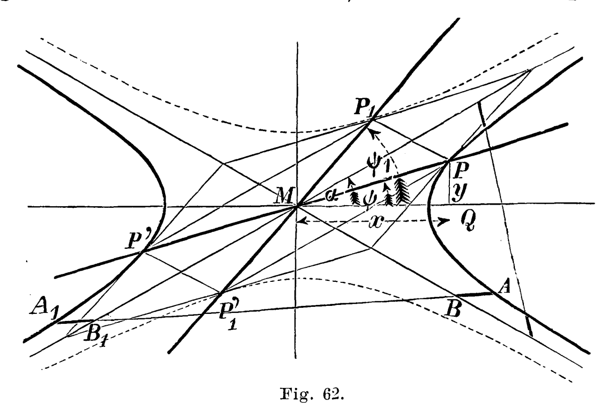


Fig. 62.

$m = \operatorname{tg}\psi$, $m_1 = \operatorname{tg}\psi_1$ (Fig. 62) ihre Richtungscoefficienten, so lautet die der Formel 3) § 14 entsprechende Gleichung:

$$m \cdot m_1 = + \frac{b^2}{a^2}, \qquad 2)$$

oder nach Einführung des Asymptotenwinkels α:

$$m \cdot m_1 = \operatorname{tg} \psi \cdot \operatorname{tg} \psi_1 = \operatorname{tg}^2 \alpha, \qquad 2)$$

d. h. ordnet man jedem Durchmesser den ihm conjugirten zu, so entsteht ein involutorisches Strahlenbüschel, in welchem die Asymptoten Doppelstrahlen sind. Jede Asymptote ist darnach sich selbst conjugirt (nicht die eine der andern). Ist im besonderen $b = a$, d. h. ist die Hyperbel gleichseitig, so halbiren die Asymptoten die Winkel der conjugirten Durchmesser.

Von zwei conjugirten Durchmessern ist immer der eine reell (er schneidet die Hyperbel), der andere imaginär (schneidet nicht). Von den beiden Halbmessern a' und b' ist also nur der eine reell, so dass die Gleichung 4) des vorigen § hier fortfällt.

Führt man aber ausser der Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

noch die conjugirte Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

und bestimmt für die Richtung ψ_1 den Halbmesser b'' in letzterer Kurve (den sogenannten Nebenhalbmesser), so folgt durch Einsetzen von P ($a' \cos \psi$, $a' \sin \psi$) und P_1 ($b'' \cos \psi_1$, $b'' \sin \psi_1$) in die eine und die andere Gleichung und Berechnung von a' und b'':

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + m^2)}{b^2 - a^2 m^2}$$

$$b''^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + m_1{}^2)}{a^2 m_1{}^2 - b^2}$$

oder nach 2):

$$b''^2 = \frac{a^4 m^2 + b^4}{b^2 - a^2 m^2}$$

und daher:

$$a'^2 - b''^2 = a^2 - b^2,$$

womit der analoge Satz zu 4) § 14 gefunden worden.

Bezeichnet man die Koordinaten von P mit xy, von P_1 mit $x'y'$, so ist:

$$x = a' \cos\psi = \frac{a'}{\sqrt{1+m^2}}, \quad y = a' \sin\psi = \frac{a'm}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$x' = b'' \cos\psi_1 = \frac{b''}{\sqrt{1+m_1{}^2}}, \quad y' = b'' \sin\psi_1 = \frac{b''m_1}{\sqrt{1+m_1{}^2}}$$

und mit Benutzung der vorigen Werthe von a' und b'':

$$x = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}, \quad y = \frac{ab \cdot m}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}$$

$$x' = \frac{ab}{\sqrt{a^2m_1{}^2 - b^2}}, \quad y' = \frac{ab \cdot m_1}{\sqrt{a^2m_1{}^2 - b^2}}.$$

Die beiden letzten Gleichungen erhalten aber nach 2) die Gestalt:

$$x' = \frac{a^2 m}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}, \quad y' = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}},$$

und daher endlich:

$$x' = \frac{a}{b} \cdot y, \quad y' = \frac{b}{a} \cdot x.$$

Mit Hilfe dieser einfachen Formeln findet man:

$$\triangle\, OPP' = \frac{xy' - yx'}{2} = \frac{1}{2}\left(x^2\frac{b}{a} - y^2\frac{a}{b}\right) = \frac{ab}{2},$$

und damit:

Parallelogramm $PP'P_1P_1' = 2ab$. (Vergleiche 5) § 14).

Zur Berechnung des Richtungscoefficienten m' von PP_1 ist anzusetzen:

$$m' = \frac{y' - y}{x' - x},$$

daher:

$$m' = \frac{\frac{b}{a}x - y}{\frac{a}{b}y - x} = -\frac{b}{a},$$

d. h. PP_1 ist zu einer Asymptote parallel. Ebenso wird gezeigt, dass die andere Seite PP_1' die Richtung der andern Asymptote hat. Daher werden die Seiten des Parallelogramms $PP'P_1P_1'$ von den Asymptoten halbirt und es folgt:

$$\text{Parallelogramm } MQ_1PQ_2{}^{1)} = \frac{1}{4} \cdot 2ab = \frac{ab}{2}. \qquad \textbf{4)}$$

Damit ist der schöne Satz bewiesen:

---

[1]) Q_1 und Q_2 (Mitten von PP_1 um PP'_1) in der Fig. 62 nicht bezeichnet, aus Fig. 63 zu entnehmen.

Zieht man durch einen beliebigen Punkt der Hyperbel Parallelen zu den Asymptoten, so entsteht ein Parallelogramm von unveränderlichem Flächeninhalt $= \frac{ab}{2}$.

Da in der Gleichung 2) nur das Verhältniss $a : b$ vorkommt, so haben alle ähnliche, ähnlich liegende und concentrische Hyperbeln, also kurz alle Hyperbeln mit denselben Asymptoten auch dieselben conjugirten Durchmesser. Die Asymptoten selbst sind aber ein besonderer Fall dieser Hyperbeln, daher:

Die beiden Stücke AB und A_1B_1 (Fig. 62) einer Sekante zwischen Asymptote und Hyperbel sind einander gleich. (Hierauf beruht eine sehr einfache Konstruktion der Hyperbel, wenn irgend ein Punkt auf ihr und die Asymptoten gegeben sind. Auch kann man den Satz benutzen, um sich zu überzeugen, ob eine etwa aus freier Hand gezogene Hyperbel richtig gezeichnet ist). Wenn die Schnittpunkte mit der Hyperbel zusammenfallen, so fliesst noch die Folgerung:

Jede Tangente an die Hyperbel genommen, zwischen den Asymptoten wird im Berührungspunkt halbirt.

Wie bei der Ellipse ist auch hier die Tangente zum conjugirten Durchmesser parallel und ihre Gleichung lautet entsprechend zu 6) § 14:

$$\frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} - 1 = 0. \qquad \textbf{5)}$$

Um die Durchschnittspunkte $P_1 (x_1, y_1)$, $P_2 (x_2, y_2)$ (Fig. 63) mit den Asymptoten zu berechnen, nehme man deren Gleichungen zu Hilfe. Für $P_1 (x_1, y_1)$ entstehen so die beiden Gleichungen

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} - 1 = 0$$

$$\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b} \qquad = 0,$$

und hieraus:

$$x_1 = \frac{a}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}, \quad y_1 = \frac{b}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}},$$

oder, da:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1$$

$$x_1 = a\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

$$y_1 = b\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

und ebenso:

$$x_2 = a\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$

$$y_2 = -b\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right).$$

Also sofort:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = x, \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = y,$$

d. h. P Mitte von P_1 und P_2 (schon oben bewiesen).

Dann aber wird:

$$\triangle MP_2P_1 = \frac{x_2y_1 - y_2x_1}{2} = \frac{2ab}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = ab,$$

also:

Die Tangenten der Hyperbel schneiden von den Asymptoten inhaltgleiche Dreiecke ab. Zieht man durch P die Parallelen PQ_1 und PQ_2 zu den Asymtoten, so muss Q_1 Mitte von MP_1, Q_2 Mitte von MP_2 werden, da P Mitte von P_1P_2. Wird noch Q_1 mit Q_2 verbunden, so zerfällt das $\triangle MP_1P_2$ in vier congruente Dreiecke, von denen zwei das Parallelogramm MQ_1PQ_2 ausmachen. Daher ist auch der Inhalt dieses Parallelogramms constant $= \frac{ab}{2}$, wie bereits früher bewiesen.

Die Tangenten in P, P', P_1, P'_1 (Fig. 62) sind parallel zu den Durchmessern $2a'$ und $2b''$ und bilden daher ein Parallelogramm, dessen Seiten = diesen Durchmessern selbst sind. Da aber seine Ecken auf den Asymtoten liegen, so folgt:

Die Länge der Tangente zwischen den Asymtoten ist = der Länge des conjugirten Nebendurchmessers $= 2b''$.

Die übrigen Sätze des vorigen Paragraphen über Tangenten und Normalen können sofort auf die Hyperbel übertragen werden. Also (Fig. 63):

Die beiden Scheitel der reellen Achse, der Schnittpunkt der Tangente mit ihr und der Fusspunkt des vom Berührungspunkt gefällten Lotes bilden vier harmonische Punkte.

Die Gleichung der Normalen in $P(xy)$ wird:

$$Xya^2 + Yxb^2 - xye^2 = 0.$$

Die beiden Brennpunkte und die Schnittpunkte von Tangente und Normale mit der reellen Achse sind vier harmonische Punkte.

Die von den Brennstrahlen nach einem Punkte der Hyperbel gebildeten Winkel werden von Tangente und Normale halbirt. (Hier aber halbirt die Tangente den Winkel selbst, die Normale den Nebenwinkel.)

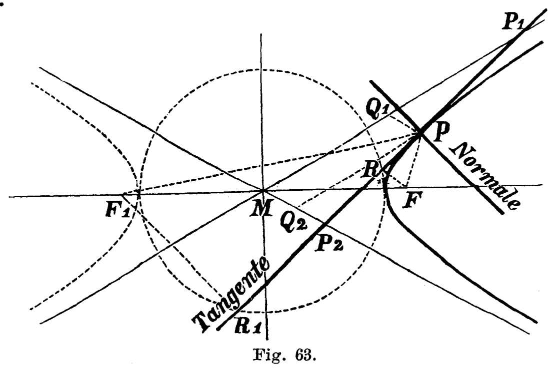


Fig. 63.

Die Längen derselben Normale vom Berührungspunkt bis zum Schnitt mit der reellen und imaginären Achse verhalten sich wie $b^2 : a^2$. Nur liegt der Berührungspunkt hier zwischen den beiden Schnittpunkten. Ist $b = a$, so liegt er in der Mitte.

Die Projektion einer Normale auf einen der beiden Brennstrahlen ist $= p$ oder $= a$, je nachdem die Normale vom Berührungspunkt bis zur reellen oder bis zur imaginären Achse genommen wird.

Das Produkt der beiden von den Brennpunkten auf eine Tangente der Hyperbel gefällten Lote ist $= b^2$, und die Fusspunkte dieser beiden Lote liegen auf dem Scheitelkreis. (Tangentenkonstruktion der Hyperbel).

Zwei von demselben Punkt aus gezogene Tangenten erscheinen, von einem Brennpunkt aus gesehen, unter gleichen Sehwinkeln. Die eine dieser Tangenten bildet mit dem einen durch den Schnittpunkt gehenden Brennstrahl denselben Winkel, wie der andere Brennstrahl mit der anderen Tangente.

Wenn $b < a$, so ist der Kreis um M mit dem Radius $\sqrt{a^2 - b^2}$ der geometrische Ort der Schnittpunkte senkrechter Tangenten. Wenn $b = a$, so sind die Asymptoten die einzigen auf einander senkrechten Tangenten. (Ihre Berührungspunkte liegen unendlich fern.)

Aufgaben.

1. Die Schnittpunkte einer gleichseitigen Hyperbel mit einer Parallelen zur reellen Achse sind mit einem Scheitel verbunden. Nachzuweisen, dass so am Scheitel ein rechter Winkel entsteht.

2. Die über parallelen Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel als Durchmessern gezeichneten Kreise gehen sämmtlich durch dieselben zwei Punkte der Hyperbel hindurch. Diese beiden Punkte liegen auf demjenigen Durchmesser, dessen Richtungscoefficient entgegengesetzt gleich dem Richtungscoefficienten der Sehne ist.

3. Alle Kreise, welche eine Hyperbel in zwei zur imaginären Hauptachse symmetrisch liegenden Punkten berühren, schneiden von den Asymptoten Sehnen ab, deren Länge unveränderlich, nämlich = dem reellen Durchmesser der Hyperbel ist.

---

§ 16.

Die wichtigsten Eigenschaften der Parabel. Andere Gleichungsformen der Kegelschnitte.

Da die Parabel als Grenzfall sowohl der Ellipse als auch der Hyperbel angesehen werden kann (§ 12), so müssen ihre Eigenschaften sich aus denen dieser Kurven bestimmen lassen. Da aber hier viele Sätze erheblich einfacher werden und auch zum Theil ein anderes Aussehen erhalten, so ist es besser, sie direkt abzuleiten und dabei auf ihre Verwandtschaft mit früheren Sätzen hinzuweisen.

Definition: Alle Parallelen zur Hauptachse der Parabel werden Durchmesser genannt. (Sie gehen durch den unendlich fernen Mittelpunkt.)

Man ziehe eine Gerade mit dem Richtungscoefficienten m:

$$y = m\,x + q$$

und bestimme ihre Durchschnittspunkte mit der Parabel:

$$y^2 - 2p\,x = 0.$$

Es folgt:

$$m^2x^2 + 2x\,(mq - p) + q^2 = 0$$

und hieraus die Abscisse ξ der Mitte:

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{p - mq}{m^2}$$

und die Ordinate η:

$$\eta = m\,\xi + q = \frac{p}{m}. \qquad \textbf{1)}$$

Wie man sieht, hängt η nicht von q, sondern nur von dem Richtungscoefficienten m der Geraden ab. Daher:

Die Mitten paralleler Sehnen mit dem Richtungscoefficientem m liegen auf dem Durchmesser, welcher von der Hauptachse den Abstand $\eta = \frac{p}{m}$ besitzt.

Lässt man die beiden Schnittpunkte zu einem einzigen Punkte $P(x, y)$ (Fig. 64) zusammenfallen, so wird $\eta = y$ und daher auch $y = \frac{p}{m}$, $m = \frac{p}{y}$.

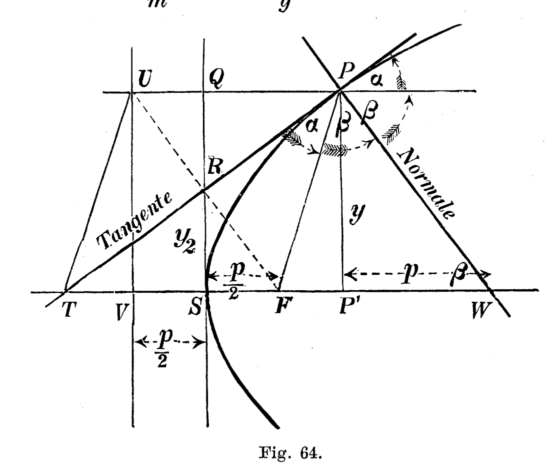


Fig. 64.

Daher wird die Gleichung der Tangente in $P(x, y)$, wenn der laufende Punkt wieder mit X, Y bezeichnet wird:

$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{p}{y},$$

oder:
$$Yy - y^2 = Xp - xp,$$

oder, wenn $y^2 = 2px$ eingesetzt wird:

$$Yy - p\,(X + x) = 0. \qquad \textbf{2)}$$

Für den Durchschnittspunkt R mit der Scheiteltangente ist $X = 0$, $Y = SR$, daher:

$$SR = \frac{p \cdot x}{y} = \frac{y^2}{2y} = \frac{y}{2},$$

d. h. die Tangente geht mitten zwischen Scheitel S und dem Fusspunkt Q des vom Berührungspunkte auf die Scheiteltangente gefällten Lotes hindurch.

Ebenso wird $ST = -x$.

Verlängert man noch PQ bis zum Schnittpunkt U mit der Scheiteltangente, so wird:

$$TF = UP = x + \frac{p}{2}.$$

Andererseits ist aber nach der Definition der Parabel:

$$UP = FP.$$

Also ist Viereck $TFPU$ ein Rhombus und R ist sein Mittelpunkt. Im Rhombus werden die Winkel von den Diagonalen halbirt, daher:

Die Tangente halbirt den Nebenwinkel zwischen Brennstrahl und Durchmesser (vergleiche § 14 und § 15).

Ferner stehen im Rhombus die Diagonalen aufeinander senkrecht, daher:

Die Fusspunkte der vom Brennpunkt auf die Tangente gefällten Lote liegen auf der Scheiteltangente. (Bei Ellipse und Hyperbel auf dem Scheitelkreis).

Um von einem Punkt Q ausserhalb der Parabel die beiden Tangenten zu ziehen (Fig. 65) zeichne man um Q als Mittelpunkt mit QF als Durchmesser den Kreis, der die Scheiteltangente in R_1 und R_2 [1]) schneidet. Dann sind QR_1 und QR_2 nach dem vorigen Satz die beiden Tangenten. Werden ferner FR_1 und FR_2 um sich selbst bis U_1 und U_2, also bis zum Schnitt mit der Directrix

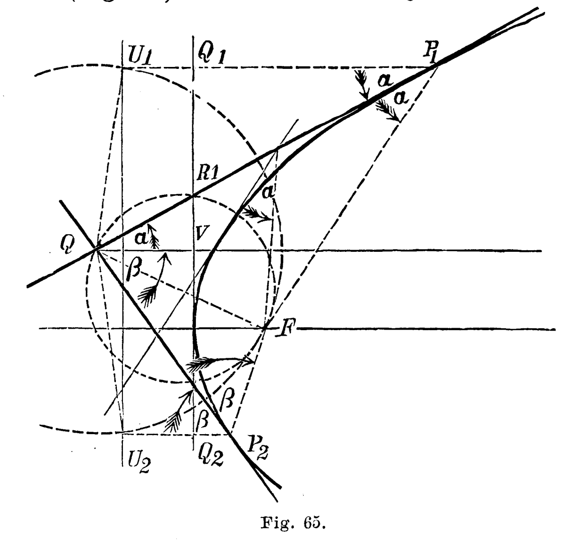


Fig. 65.

¹) R_2 fehlt in Fig. 65.

verlängert, so schneiden die durch U_1 und U_2 gezogenen Parallelen zur Hauptachse die Tangente in den Berührungspunkten P_1 und P_2.

Aus der Congruenz der Dreiecke QFP_1 und QUP_1 und der Dreiecke QFP_2, QU_2P_2 folgt:

$$\left.\begin{aligned} \sphericalangle U_1QF &= 2 \sphericalangle P_1QF \\ \sphericalangle FQU_2 &= 2 \sphericalangle FQP_2 \end{aligned}\right\} \text{ daher:}$$

$$\sphericalangle U_1QU_2 = 2 \sphericalangle P_1QP_2, \quad \sphericalangle P_1QP_2 = \frac{1}{2} \sphericalangle U_1QU_2.$$

Liegt im besonderen Q auf der Leitlinie, so folgt der Satz:

Die Leitlinie ist der geometrische Ort der Schnittpunkte senkrechter Tangenten. (Bei Ellipse und Hyperbel war dieser Ort ein Kreis.)

Wird noch durch Q die Parallele QV zur Hauptachse gezogen, so folgt:

$$\sphericalangle U_1QV = \sphericalangle U_2QV = \frac{1}{2} \sphericalangle U_1QU_2 = \sphericalangle P_1QP_2.$$

Daher:

$$\sphericalangle FQP_1 = \sphericalangle VQP_2, \quad \sphericalangle FQP_2 = \sphericalangle VQP_1, \text{ d. h.:}$$

Sind von irgend einem Punkt an die Parabel die beiden Tangenten, der Brennstrahl und die Parallele zur Hauptachse (der Brennstrahl nach dem zweiten, unendlich fernen Brennpunkt) gezogen, so bildet die eine Tangente mit dem Brennstrahl denselben Winkel, wie die Parallele zum andern Brennstrahl. (Vergleiche § 14 und 15.)

Ferner ist:

$$\begin{aligned} \sphericalangle QU_1P_1 &= \sphericalangle QFP_1 \\ \sphericalangle QU_2P_2 &= \sphericalangle QFP_2. \end{aligned}$$

Da nun $\sphericalangle QU_1P_1 = \sphericalangle QU_2P_2$ ($= 90^0 +$ je einem Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks QU_1U_2) ist, so folgt:

$$\sphericalangle QFP_1 = \sphericalangle QFP_2.$$

Zwei von demselben Punkte aus gezogene Tangenten der Parabel erscheinen, vom Brennpunkt aus gesehen, unter gleichem Sehwinkel. (Ganz gleichlautend bei Ellipse und Hyperbel.)

Es ist, wie vorhin gezeigt:

$$\sphericalangle FQP_2 = \sphericalangle P_1QV = \sphericalangle QP_1U_1.$$

Der zuletzt genannte Winkel ist aber $= \sphericalangle FP_1Q$, daher:

$$\sphericalangle FQP_2 = \sphericalangle FP_1Q, \text{ und ebenso:}$$

$$\sphericalangle FQP_1 = \sphericalangle FP_2Q.$$

Wird die Tangente P_1Q als fest, die Tangente P_2Q aber als beweglich angesehen, so bleibt der Winkel FP_1Q stets derselbe und der Winkel FQP_2 ändert daher seine Grösse nicht. Daher:

Schneidet man sämmtliche Tangenten der Parabel durch eine einzige unter ihnen und verbindet die Durchschnittspunkte mit dem Brennpunkt, so bilden alle Tangenten mit den zugehörigen Brennstrahlen gleiche Winkel. Fällt die besonders genannte Tangente mit der Scheiteltangente zusammen, so werden diese Winkel $= 90^0$.

Durch Anwendung der Umkehrung des Satzes vom Peripheriewinkel folgt hieraus sofort:

Der umbeschriebene Kreis eines Dreiecks, dessen Seiten Tangenten an die Parabel sind, geht durch den Brennpunkt hindurch.

Da die Tangente den Nebenwinkel zwischen Brennstrahl FP und Durchmesser durch P halbirt, so halbirt die Normale den Winkel selbst; ein Satz, der bei den parabolischen Spiegeln Anwendung findet, die ein vom Brennpunkt ausgehendes Lichtstrahlenbündel parallel zurückwerfen und umgekehrt parallele Strahlen im Brennpunkt vereinigen.

Da der Richtungscoefficient der Tangente $= \frac{p}{y}$, so ist derjenige der Normale $= -\frac{y}{p}$ und ihre Gleichung daher:

$$\frac{Y-y}{X-x} = -\frac{y}{p}.$$

Für den Durchschnittspunkt W mit der x-Achse (Fig. 64) ist $Y = 0$, $X = SW$, daher:

$$SW = x + p,$$

und also:

$$P'W = p, \qquad \textbf{3)}$$

d. h. die Projektion der Normalen auf die Hauptachse, die sogenannte Subnormale der Parabel ist constant $= p =$ dem Halbparameter der Parabel. (Vergleiche § 14 und 15.)

Die bisher benutzten Gleichungen der Kegelschnitte sind gewesen:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (Ellipse, Mittelpunktsgleichung),

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (Hyperbel, Mittelpunktsgleichung),

$y^2 - 2px = 0$ (Parabel, Scheitelgleichung).

Es sind dies die einfachsten und am meisten verwendeten Formen ihrer Gleichungen, welche bei Uebergang zu anderen Koordinatensystemen sich in andere Formen verwandeln, von denen wir die wichtigsten jetzt kennen lernen wollen.

1) Scheitelgleichung der Ellipse und Hyperbel.

Man nehme (Fig. 66) den Scheitel S_1 als Anfangspunkt, die grosse Achse zur x-Achse und die Scheiteltangente als y-Achse und gehe von der Mittelpunktsgleichung aus:

$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0.$

Die Transformationsformeln sind hier sehr einfach, sie lauten:

$\xi = x - a, \ \eta = y.$

Dies eingesetzt giebt

$\left(\frac{x-a}{a^2}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

oder entwickelt und $\frac{b^2}{a} = p$ gesetzt:

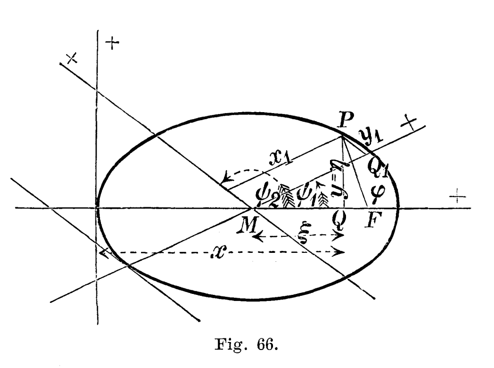


Fig. 66.

$$y^2 - 2px + \frac{b^2 x^2}{a^2} = 0, \ y^2 = 2px - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

als Scheitelgleichung der Ellipse. Ebenso wird die der Hyperbel:

$$y^2 = 2px + \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Daher:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 2px - \frac{b^2}{a^2}x^2 \\ y^2 = 2px \\ y^2 = 2px + \frac{b^2}{a^2}x^2 \end{array}\right\} \text{Scheitelgleichung der} \left\{\begin{array}{l} \text{Ellipse,} \\ \text{Parabel,} \\ \text{Hyperbel.} \end{array}\right. \quad 4)$$

2) Gleichung der Ellipse und Hyperbel, bezogen auf irgend zwei conjugirte Durchmesser.

Der Ausgangspunkt ist wieder die Mittelpunktsgleichung

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Nach § 4 sind hier die Transformationsformeln, die übrigens auch leicht an der Figur von Neuem entwickelt werden können:

$$\xi = x_1 \cos\psi + y_1 \cos\psi_1 \text{ [1]}$$
$$\eta = x_1 \sin\psi + y_1 \sin\psi_1$$

eingesetzt:

$$\frac{(x_1 \cos\psi + y_1 \cos\psi_1)^2}{a^2} + \frac{(x_1 \sin\psi + y_1 \sin\psi_1)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

oder:

$$x_1{}^2\left(\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}\right) + 2x_1y_1\left(\frac{\cos\psi \cdot \cos\psi_1}{a^2} + \frac{\sin\psi \cdot \sin\psi_1}{b^2}\right)$$
$$+ y_1{}^2\left(\frac{\cos^2\psi_1}{a^2} + \frac{\sin^2\psi_1}{b^2}\right) - 1 = 0.$$

Der Coefficient von $2x_1y_1$ ist $= 0$, denn er kann so geschrieben werden:

$$\frac{\cos\psi \cdot \cos\psi_1}{a^2}\left(1 + \operatorname{tg}\psi \cdot \operatorname{tg}\psi_1 \cdot \frac{b^2}{a^2}\right) = 0 \text{ (nach Formel 3, § 14).}$$

Ferner ist für Q ($x_1 = a'$, $y_1 = 0$)

$$a'^2\left(\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}\right) - 1 = 0,\ a'^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}}$$

Ebenso:

$$b'^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2\psi_1}{a^2} + \frac{\sin^2\psi_1}{b^2}}$$

und daher:

$$\frac{x_1{}^2}{a'^2} + \frac{y_1{}^2}{b'^2} - 1 = 0 \qquad \textbf{5a)}$$

als Gleichung der Ellipse bezogen auf zwei conjugirte Durchmesser.

Ebenso wird die entsprechende Gleichung der Hyperbel:

$$\frac{x_1{}^2}{a'^2} - \frac{y_1{}^2}{b'^2} - 1 = 0. \qquad \textbf{5b)}$$

Der Form nach sind diese Gleichungen mit den Mittelpunktsgleichungen identisch, nur dass hier die Achsen im allgemeinen schief stehen. Für eine Ellipse kann man sich übrigens so einrichten, dass $a' = b'$ und ihre Gleichung daher:

---

[1]) ψ und ψ_1 in Fig. 66 ψ_1 und ψ_2 genannt.

$$x_1^2 + y_1^2 - a'^2 = 0,$$

wird also ganz gleichlautend mit der Mittelpunktsgleichung des Kreises.

3) Gleichung der Ellipse und Hyperbel, bezogen auf einen Durchmesser und die Tangente im Endpunkt desselben.

Man findet genau dasselbe wie bei 1). Setzt man noch $\frac{b'^2}{a'} = p'$, so wird:

$$y^2 = 2p'x - \frac{b'^2}{a'^2} \text{ (Ellipse)}, \qquad \textbf{6a)}$$

$$y^2 = 2p'x + \frac{b'^2}{a'^2} \text{ (Hyperbel)}. \qquad \textbf{6b)}$$

3a) Für die Parabel ist die Ableitung der entsprechenden Gleichung etwas anders. Es seien a und b die Koordinaten von R (Fig. 67) bezogen auf den Scheitel, und φ der Richtungswinkel der Tangente.

Die Scheitelgleichung giebt:

$$\eta^2 - 2p\,\xi = 0.$$

Die Transformationsformeln werden:

$$\xi = a + x + y \cos \varphi$$
$$\eta = b \qquad + y \sin \varphi$$

eingesetzt giebt:

$$(b + y \sin \varphi)^2 - 2p\,(a + x + y \cos \varphi) = 0,$$

oder:

$$y^2 \sin^2 \varphi + 2y\,(b \sin \varphi - p \cos \varphi) - 2px + b^2 - 2pa = 0.$$

Fig. 67.

Der Coefficient von y ist $= 0$, da $\operatorname{tg} \varphi = \frac{p}{b}$ (vergleiche 1) § 16, aber auch die Constante ist $= 0$, da $Q\,(a\,b)$ auf der Parallelen liegt, also wenn noch $\frac{p}{\sin^2 \varphi} = p'$ gesetzt wird:

$$y^2 - 2p'x = 0. \qquad \textbf{6c)}$$

4) Polargleichung eines Kegelschnittes, bezogen auf einen Brennpunkt als Pol.

Für die Ellipse geht man am besten von der Formel 5), § 13 aus:

$$r = a - \frac{e}{a}x = a - \varepsilon x.$$

Hier ist r der Radiusvector vom Brennpunkt, x aber muss noch durch r und φ ausgedrückt werden. Da x Abscisse, bezogen auf den Mittelpunkt als Anfangspunkt ist, so folgt:

$$x = e + r \cos \varphi.$$

Dies eingesetzt giebt:

$$r = a - \frac{e}{a}(e + r \cos \varphi) = a - \frac{e^2}{a} - \varepsilon r \cos \varphi = p - \varepsilon r \cos \varphi,$$

und daraus:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Genau dasselbe erhält man für die Hyperbel und auch für die Parabel, daher:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad \text{Polargleichung von} \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Parabel, wenn } \varepsilon \\ \text{Hyperbel} \end{array} \begin{array}{l} < 1 \\ = 1 \\ > 1. \end{array} \qquad 7)$$

Bemerkung: Diese Formen 7) der Gleichungen der Kegelschnitte finden hauptsächlich in der Astronomie Anwendung, da nach dem ersten Keppler'schen Gesetz die Sonne in einem Brennpunkt der Bahn steht.

Anmerkung: Die Gleichung:

$$r = a - \varepsilon x,$$

oder nach Einführung der Abscisse x_1, vom Brennpunkt aus:

$$r = p - \varepsilon x_1$$

ist ein besonderer Fall der Gleichung:

$$\pm r = (\alpha + \beta x + \gamma xy),$$

in welcher r, d. h. die Entfernung des laufenden Punktes vom Anfangspunkt = irgend einer linearen Funktion von x und y gesetzt ist. Nach 3') § 9 ist $\alpha + \beta x + \gamma y = \Delta \cdot \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$, wo Δ das Lot von $P(x, y)$ auf die Linie bedeutet, welche die Gleichung hat: $\alpha + \beta x + \gamma y = 0$. Daher ist $\frac{r}{\Delta} = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$ = constant.

Die genannte Gerade ist daher die zum Anfangspunkt als Brennpunkt zugehörige Leitlinie des durch obige Gleichung bestimmten Kegelschnittes. Wird das Lot auf dieselbe als Anfangsrichtung genommen, so erhält γ den Werth 0 und man kommt wieder auf:

$$r = \alpha + \beta x, \text{ also auf die Form } r = a - \varepsilon x$$

zurück.

5) Gleichung der Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten als Koordinatenachsen. Die Transformationsformeln sind hier (Fig. 68):

$$\xi = (x + y) \cdot \cos \alpha, \; \eta = (- x + y) \sin \alpha.$$

In die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel eingesetzt, giebt:

$$\frac{(x + y)^2 \cos^2 \alpha}{a^2} - \frac{(- x + y)^2 \sin^2 \alpha}{b^2} - 1 = 0$$

oder:

$$(x^2 + y^2)\left(\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} - \frac{\sin^2 \alpha}{b^2}\right) + 2xy\left(\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{b^2}\right) - 1 = 0.$$

Da α der Asymptotenwinkel, so ist $\sin \alpha = \frac{b}{e}$, $\cos \alpha = \frac{a}{e}$. Die Gleichung wird daher sehr einfach, nämlich:

$$xy - \left(\frac{e}{2}\right)^2 = 0. \quad 8)$$

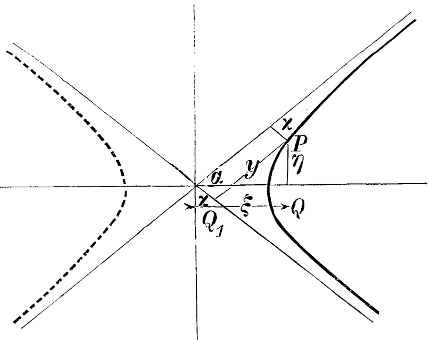


Fig. 68.

Diese Gleichung sagt aus, dass xy und also auch der Inhalt des Parallelogramms MQ_2PQ_1 (Fig. 63) constant ist, ein bereits wiederholt gefundener Satz.

Aufgaben.

1. Verlängert man die Normalen einer Parabel, genommen bis zum Schnitt mit der Hauptachse über diesen Schnitt um sich selbst, so liegen die Endpunkte auf einer zweiten Parabel, die aus der alten durch Verschiebung um $2p$ entstanden ist. Jede durch solchen Endpunkt gezogene Sehne der ersten Parabel wird von dem zugehörigen Punkt derselben in einem rechten Winkel projicirt.

2. Der Schnittpunkt der Höhen eines Dreieckes, dessen Seiten (beziehungsweise in der Verlängerung) eine Parabel berühren, liegt auf der Leitlinie (Satz von Steiner).

3. Gegeben die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Man verschiebe den Anfangspunkt auf der x-Achse um $\sqrt{a^2 + b^2}$ und drehe dann um 45^0. Wie lautet nun die Gleichung?

§ 17.

Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades.

Die vorangegangenen Paragraphen haben gezeigt, dass Ellipse, Hyperbel und Parabel, diese drei für die Anwendung so wichtigen Kurven, eine Fülle von Eigenschaften gemeinsam haben, von denen aber in weiterer Folge sich immer deutlicher diejenige als die bedeutsamste herausstellen wird, dass ihre Gleichungen denselben, den zweiten Grad haben. In Bezug auf diesen Punkt ist aber noch eine entscheidende Frage offen, nämlich:

Ellipse, Hyperbel und Parabel sind Kurven zweiter Ordnung. Sind sie aber die einzigen Arten von Kurven zweiter Ordnung? Oder giebt es noch andere?

Bei dieser Frage wollen wir von den zerfallenden und den imaginären Kurven zweiter Ordnung absehen, denn zwei gerade Linien sind keine eigentliche Kurve zweiter Ordnung mehr, und eine imaginäre Kurve ist nur ein anderer Ausdruck für eine Gleichung, der aber keiner Kurve entspricht. Also noch einmal:

Sind Ellipse, Hyperbel und Parabel die einzigen Arten von Kurven zweiter Ordnung?

Der geradeste Weg zur Antwort ist offenbar der, dass man die allgemeinste Gleichung zweiten Grades:

$$a \cdot x^2 + b \cdot xy + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0,$$

in welcher über die sechs Coefficienten a, b, c, d, e, f gar keine Voraussetzung gemacht wird, „diskutirt“.

In dieser Form ist die Gleichung weder Mittelpunktsgleichung von Ellipse oder Hyperbel, noch Scheitelgleichung der Parabel. Denn im ersteren Falle müsste $b = 0$, $d = 0$, $e = 0$, im letzteren $a = 0$, $b = 0$, $e = 0$, $f = 0$ sein, was aber nicht angenommen werden darf, da über a, b, c, d, e und f gar keine Voraussetzungen gemacht werden sollen.

Nichtsdestoweniger ist die Möglichkeit vorhanden, dass auch die allgemeine Gleichung einen Kegelschnitt darstellt, da ein und dieselbe Kurve unzählig viele Gleichungen hat, die durch Koordinatentransformation in einander übergehen. Um aber diese Möglichkeit in Gewissheit zu verwandeln, ist die Frage so zu stellen:

Wann kann die allgemeine Gleichung so transformirt werden, dass sie nachher zur Mittelpunktsgleichung oder Scheitelgleichung eines Kegelschnittes werde?

Hält man sich zunächst an die Mittelpunktsgleichung, so läuft diese Frage darauf hinaus, ob man es so einrichten kann, dass in der neuen Gleichung die Coefficienten der Glieder ersten Grades und der Coefficient des Produktengliedes $xy = 0$ werden, dass, kurz gesagt, diese Glieder verschwinden. Schon eine oberflächliche Betrachtung wirft auf dieses Unternehmen ein günstiges Licht. Denn drei Bedingungen sind zu erfüllen, da drei Coefficienten verschwinden sollen. Andererseits stehen bei der allgemeinsten Koordinatentransformation, sofern es sich um rechtwinklige Systeme handelt, also:

$$x = \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi + \alpha$$
$$y = \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi + \beta,$$

drei Grössen zur Verfügung, nämlich α und β, d. i. die Koordinaten des neuen Anfangspunktes und der Drehwinkel φ der Transformation. Man sieht also sofort, dass das Problem auf die Auflösung von drei Gleichungen mit drei Unbekannten (α, β und φ) hinauskommen wird.

Vor der Inangriffnahme desselben empfiehlt es sich, die Bezeichnung der Coefficienten a, b, c, d, e, f so abzuändern, dass sofort ihre Bedeutung als Coefficient von x^2, von xy, von y^2 etc. erkannt werden kann. Hierzu unterscheidet man die Coefficienten nicht durch verschiedene Buchstaben $a, b, c \ldots$, sondern durch angehängte Indices 1, 2, 3 derart, dass der Index 1 dem x, 2 dem y entsprechen soll, während der Index 3 anzeigt, dass das betreffende Glied nicht den höchsten Grad habe. Darnach würde statt a zu setzen sein: a_{11}, statt b: a_{22}, statt f: a_{33}. Und weiter müsste b in a_{12}, d in a_{13}, e in a_{23} umgeändert werden; man schreibt aber zweckmässiger die letzten drei Coefficienten, also die mit zwei *verschiedenen* Indices nicht a_{12}, a_{13}, a_{23}, sondern $2a_{12}$, $2a_{13}$, $2a_{23}$ [1]), wobei ein für alle mal festgesetzt werden mag, dass $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$ sein soll.

---

[1]) Es stellt sich nämlich heraus, dass sonst der Faktor 2 im Laufe der Rechnungen störend bemerkbar wird.

Die gegebene Gleichung soll also von nun an bezeichnet werden mit:

$$F(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad 1)$$

wobei zu merken ist, dass a_{12} der halbe Coefficient von xy, a_{13} der halbe von x, a_{23} der halbe von y ist.

Hier wären nun die Transformationsformeln einzusetzen, wobei ein grosser Aufwand von Rechenarbeit durch Entwickelung von x^2, xy, y^2 etc. unvermeidlich wird, den man erheblich verringern kann, wenn die Koordinatentransformation zerlegt wird, nämlich (am besten) 1) in eine Parallelverschiebung, 2) in eine Drehung.

I) Die Parallelverschiebung (Transformation auf den Mittelpunkt).

Die Transformationsformeln sind hier:

$$x = x_1 + \alpha$$
$$y = y_1 + \beta. \qquad 2)$$

(α- und β-Koordinaten des neuen Anfangspunktes. In 1) eingesetzt giebt:

$$F(x_1 + \alpha), y_1 + \beta) \equiv F_1(x_1, y_1)$$
$$\equiv a_{11}(x_1 + \alpha)^2 + 2a_{12}(x_1 + \alpha)(y_1 + \beta) + a_{22}(y_1 + \beta)^2 + 2a_{13}(x_1 + \alpha) + 2a_{23}(y_1 + \beta) + a_{33} = 0.$$

Hier ist nun auszurechnen:

$$(x_1 + \alpha)^2 = x_1^2 + 2\alpha x_1 + \alpha^2$$
$$(x_1 + \alpha)(y_1 + \beta) = x_1 y_1 + \beta x_1 + \alpha y_1 + \alpha\beta$$
$$(y_1 + \beta)^2 = y_1^2 + 2\beta y_1 + \beta^2$$

mit a_{11}, $2a_{12}$, a_{22} etc. zu multipliciren, und nun zu sammeln. Augenscheinlich bleiben die Coefficienten der Glieder zweiten Grades dabei unveränderlich dieselben, während die anderen von α und β abhängen. Die neue Gleichung wird daher:

$$F_1(x_1 y_1) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}x_1 y_1 + a_{22}y^2_1 + 2a'_{13}x_1 + 2a'_{23}y_1 + a'_{33} = 0$$

und man findet:

$$a'_{13} = a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}$$
$$a'_{23} = a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}$$
$$a'_{33} = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + 2a_{13}\alpha + 2a_{23}\beta + a_{33} = F(x, y) \text{ für } x = \alpha,\ y = \beta.$$

Unser Ziel ist, die Coefficienten des Produktengliedes und der Glieder ersten Grades zu 0 zu machen. Dem ersteren ist durch die Paralleltransformation nicht beizukommen, da er, wie erwähnt, sich nicht ändert, wohl aber sind die beiden andern von α und β abhängig. Also machen wir den Ansatz:

$$a'_{13} = 0,\ a'_{23} = 0, \text{ oder:}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13} &= 0 \\ a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \textbf{3)}$$

Dies sind für α und β zwei Gleichungen ersten Grades, aus denen sofort folgt:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= -\frac{a_{13} \cdot a_{22} - a_{23} \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2} \\ \beta &= -\frac{a_{13} \cdot a_{21} + a_{23} \cdot a_{11}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2} \end{aligned}\right\} \quad \textbf{3a)}$$

womit der neue Anfangspunkt bestimmt ist. Diese Werthe für α und β sind nun in den Ausdruck für a'_{33} einzusetzen. Indessen kann diese Arbeit durch eine leichte Umformung sehr wesentlich vereinfacht werden. Man bilde aus den drei Ausdrücken für a'_{13}, a'_{23}, a'_{33} die Identität:

$$a'_{33} - a'_{13}\,\alpha - a'_{23}\,\beta = a_{31}\,\alpha + a_{32}\,\beta + a_{33},$$

oder, da hier $a'_{13} = a'_{23} = 0$

$$a'_{33} = a_{31}\,\alpha + a_{32}\,\beta + a_{33}, \qquad \textbf{4)}$$

und endlich nach Einsetzen von α und β:

$$a'_{33} = \frac{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23}^2 - a_{22} \cdot a_{31}^2 - a_{33} \cdot a_{12}^2 + 2a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2} \qquad \textbf{4a)}$$

und die neue Gleichung ist nunmehr:

$$F_1(x_1 y_1) \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + a'_{33} = 0. \qquad \textbf{1')}$$

Sie ist von den Gliedern ersten Grades „befreit".

Bemerkung: α, β und a'_{33} haben denselben Nenner, nämlich:

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2,$$

der nichts anderes ist, als die „Diskriminante" der Glieder zweiten Grades:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}\,xy + a_{22}y^2.$$

Er spielt, wie sich immer mehr herausstellen wird, eine entscheidende Rolle. Daher möge er mit einem besonderen Zeichen bedacht werden, nämlich:

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \textbf{5)}$$

Aber auch der Zähler von a'_{33} hat eine sehr wesentliche Bedeutung, welche die Einführung eines neuen Buchstaben D für ihn gerathen erscheinen lässt, so dass:

$$D = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23}^2 - a_{22}\, a_{31}^2 - a_{33}\, a_{12}^2 + 2a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{12} \qquad 6)$$

(oder in Deterimantenform):

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}$$

D ist die Diskriminante der Form $F(x, y)$ selbst und wird auch kurzweg die „grosse“ Diskriminante genannt, im Gegensatz zu Δ, der „kleinen“ Diskriminante oder der Diskriminante der Glieder zweiten Grades.

Mit Einführung von D und Δ wird endlich

$$a'_{33} = \frac{D}{\Delta}. \qquad 4a)$$

Es bleibt noch die Frage zu beantworten, was der so bestimmte neue Anfangspunkt 3a) eigentlich für ein Punkt ist. Man bedenke hierzu, dass in 1') die Glieder ersten Grades verschwunden sind. Daraus geht sofort hervor, dass die Gleichung 1') unverändert bleibt, wenn statt x_1 und y_1 gesetzt werden $(-x_1)$ und $(-y_1)$. Liegen demnach zwei Punkte, P und P_1, sich in Bezug auf den neuen Anfangspunkt gegenüber und befindet sich der eine auf der Kurve, so der andere auch. Folglich ist der neue Anfangspunkt der Mittelpunkt der Kurve. Wir haben kurz gesagt, den Mittelpunkt gefunden und die Gleichung auf diesen Mittelpunkt „gebracht“.

2) Die Drehung. (Transformation auf die Hauptachsen.)

Die Paralleltransformation ist fertig und wir haben es nur noch zu thun mit der transformirten Gleichung:

$$F_1(x_1 y_1) \equiv a_{11} x_1^2 + 2a_{12}\, x_1 y_1 + a_{22}\, y_1^2 + a'_{33} = 0. \qquad 1')$$

Jetzt bleibt nichts mehr übrig, als das Koordinatensystem um den Mittelpunkt zu drehen, d. h. die Formeln anzusetzen (siehe § 4):

$$x_1 = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi$$
$$y_1 = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi$$

und in 1') einzuführen. Es ist:

$$a_{11}x_1^2 = a_{11}\cos^2\varphi\cdot\xi^2 - 2a_{11}\cos\varphi\sin\varphi\cdot\xi\eta + a_{11}\sin^2\varphi\cdot\eta^2$$
$$2a_{12}x_1y_1 = 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi\cdot\xi^2 + 2a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\cdot\xi\eta - 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi\cdot\eta^2$$
$$a_{22}y_1^2 = a_{22}\sin^2\varphi\cdot\xi^2 + 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi\cdot\xi\eta + a_{22}\cos^2\varphi\cdot\eta^2.$$

Die neue Gleichung wird daher:

$$a'_{11}\xi^2 + 2a'_{12}\xi\eta + a'_{22}\eta^2 + a'_{33} = 0, \qquad \mathbf{1'')}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$a'_{11} = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi$$
$$a'_{12} = -(a_{11} - a_{22})\sin\varphi\cos\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$
$$a'_{22} = a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\cos^2\varphi.$$

Diese Formeln werden sehr viel einfacher nach Einführung der trigonometrischen Funktionen des doppelten Winkels durch die Gleichungen:

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$$
$$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$$
$$\cos\varphi\sin\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}.$$

Es wird dann:

$$a'_{11} = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} + \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cdot\cos 2\varphi + a_{12}\sin 2\varphi$$
$$a'_{12} = \qquad - \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cdot\sin 2\varphi + a_{12}\cos 2\varphi \qquad \mathbf{7)}$$
$$a'_{22} = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} - \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cdot\cos 2\varphi - a_{12}\sin 2\varphi.$$

Hieraus folgt durch Addition der ersten und dritten Gleichung sofort:

$$a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22},$$

d. h. die Summe der Coefficienten der quadratischen Glieder bleibt unveränderlich, wie man auch das Koordinatensystem dreht; diese Summe ist hier eine Invariante. Sie sei mit s bezeichnet, also:

$$s = a_{11} + a_{22}.$$

(Aber auch Δ ist invariant, denn nach leichten Reduktionen ergiebt sich:

$$a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \Delta.)$$

Nun aber auf unser Ziel losgehend, setzen wir sofort:

$$a'_{12} = 0, \text{ d. h. nach:}$$

$$\frac{a_{11} - a_{22}}{2} \sin 2\varphi + a_{12} \cos 2\varphi = 0,$$

also:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}. \qquad 8)$$

Die Tangente ist eine trigonometrische Funktion, welche alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ haben kann. Daher kann aus dieser Gleichung der Winkel φ immer bestimmt werden, wobei aber wohl zu beachten ist, dass man eigentlich vier verschiedene Richtungen wählen darf. Denn die Tangente bleibt unverändert, wenn der Winkel (hier 2φ) um 180^0, φ also um 90^0 vermehrt wird. Ist daher φ ein Winkel, der die Gleichung 8) erfüllt, so sind $\varphi + 90^0$, $\varphi + 180^0$ und $\varphi + 270^0$ auch solche. Mit anderen Worten: Die Gleichung 8) bestimmt wohl das neue Koordinatenkreuz, lässt es aber ganz unbestimmt, in welche der vier Richtungen dieses Kreuzes die neue Anfangsrichtung gelegt werde. Daher wollen wir, um Zweideutigkeiten zu vermeiden, annehmen, dass 2φ concav, also φ spitz genommen werde — vorbehaltlich einer vielleicht später nochmals auszuführenden Drehung um 90^0.

Geht man von der Tangente mittelst der Formeln:

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

zum sinus und cosinus über und setzt zur Abkürzung:

$$\varrho = \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}{}^2} = \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{12} - a_{12}{}^2)}$$
$$= \pm \sqrt{s^2 - 4\Delta}$$

so wird:

$$\cos 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{\varrho}, \ \sin 2\varphi = \frac{2a_{12}}{\varrho},$$

wobei noch zu bemerken ist, dass das Vorzeichen von ϱ mit dem Vorzeichen des Werthes von a_{12} übereinstimmen muss, da nach der getroffenen Uebereinkunft sin 2φ nur positiv sein kann.

Mit Hilfe dieser Werthe wird:

$$a'_{11} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{a_{11} - a_{22}}{2} \cdot \frac{a_{11} - a_{22}}{\varrho} + a_{12} \cdot \frac{2a_{12}}{\varrho}$$
$$= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}{}^2}{2\varrho} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{\varrho^2}{2\varrho},$$

oder endlich:

$$a'_{11} = \frac{s+\varrho}{2}, \text{ und ebenso:}$$
$$a'_{22} = \frac{s-\varrho}{2} \tag{9}$$

Die Richtigkeit dieser beiden Formeln folgt übrigens auch daraus, dass s und $\varDelta$ Invarianten sind. Denn da hier $a'_{12} = 0$ ist, so muss:

$$a'_{11} + a'_{22} = s,$$
$$a'_{11} \cdot a'_{22} = \varDelta$$

werden, d. h. a'_{11} und a'_{22} müssen Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 - s \cdot \lambda + \varDelta = 0$$

sein, durch deren Auflösung die vorigen Werthe für a'_{11} und a'_{22} wieder gefunden werden.

Will man endlich noch $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ selbst haben, so ist zu bilden:

$$\sin\varphi = +\sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}} = +\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{a_{11}-a_{22}}{\varrho}\right)}.$$
$$\cos\varphi = +\sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}} = +\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{a_{11}-a_{22}}{\varrho}\right)}.$$

(Das $+$ Zeichen ist zu nehmen, weil φ ein spitzer Winkel sein soll.)

Das zu Anfang gesetzte Ziel ist erreicht. Die neue Gleichung lautet nunmehr:

$$a'_{11}\,\xi^2 + a'_{22}\,\eta^2 + a'_{33} = 0. \tag{1''}$$

Die Glieder ersten Grades und das Produktglied sind verschwunden. Jetzt dividire man, noch im Hinblick auf die Mittelpunktsgleichung von Ellipse und Hyperbel durch $-a'_{33}$, woraus folgt:

$$\frac{\xi^2}{p_1} + \frac{\eta^2}{p_2} - 1 = 0,$$

wo

$$p_1 = -\frac{a'_{33}}{a'_{11}}$$
$$p_2 = -\frac{a'_{33}}{a'_{22}},$$

worauf folgende vier Fälle zu unterscheiden sind:

1) p_1 und p_2 beide positiv, so setze man, wenn $p_1 > p_2$:

$$p_1 = a^2,\ p_2 = b^2,\ a = \sqrt{p_1},\ b = \sqrt{p_2},$$

wenn aber $p_1 < p_2$, so:

$$p_1 = b^2,\ p_2 = a^2,\ b = \sqrt{p_1},\ a = \sqrt{p_2}.$$

Die Gleichung wird also:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{\xi^2}{b^2} + \frac{\eta^2}{a^2} - 1 = 0,$$

Sie ist also die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse geworden, nur dass, wenn $p_1 < p_2$ die ξ-Achse die kleinere ist und man um 90^0 weiter hätte drehen müssen, wenn auch in diesem Falle die ξ-Achse mit der grossen Achse hätte zusammenfallen sollen:

2) p_1 sei positiv, p_2 negativ.

Man setze:

$$p_1 = a^2,\ p_2 = -b^2,\ a = \sqrt{p_1},\ b = \sqrt{-p_2}$$

und die Gleichung wird:

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0,$$

ist also Mittelpunktsgleichung einer Hyperbel.

3) p_1 sei negativ, p_2 sei positiv.

Man setze:

$$p_1 = -b^2,\ p_2 = +a^2,\ b = \sqrt{-p_1},\ a = \sqrt{+p_2}.$$

Die Gleichung wird:

$$-\frac{\xi^2}{b^2} + \frac{\eta^2}{a^2} - 1 = 0$$

und ist auch die Mittelpunktsgleichung eine Hyperbel, nur müsste man hier nochmals um 90^0 drehn, wenn die ξ-Achse zur reellen Achse werden sollte.

4) p_1 und p_2 beide negativ.

Man setze:

$$p_1 = -a^2,\ p_2 = -b^2,\ a = \sqrt{-p_1},\ b = \sqrt{-p_2}$$

und die Gleichung erhält die Form:

$$-\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Sie wird für kein reelles Werthepaar ξ, η erfüllt und stellt eine „imaginäre“ Ellipse dar.

Fasst man 1) und 4) und ebenso 2) und 3) zusammen, so

kann man auch so sagen: Haben p_1 und p_2 gleiche Vorzeichen, so Ellipse, ungleiche, so Hyperbel. Oder auch: Ist $p_1 \cdot p_2$ positiv, so Ellipse, negativ, so Hyperbel. Nun war aber:

$$p_1 = -\frac{a'_{33}}{a'_{11}}, \; p_2 = -\frac{a'_{33}}{a'_{22}},$$

Daher:

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{a'^2_{33}}{a'_{11} \cdot a'_{22}} = \frac{a'^2_{33}}{\Delta},$$

$p_1 \cdot p_2$ hat daher dasselbe Vorzeichen wie Δ, daher endlich:

Die vorgelegte Kurve ist eine (reelle oder imaginäre) Ellipse oder eine Hyperbel, jenachdem $\Delta \gtrless 0$.

So entscheidet das Vorzeichen von Δ über die Art des Kegelschnittes. Ist Δ positiv, so lässt sich auch leicht ermitteln, wann die Ellipse reell, wann imaginär ist. Da $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$ positiv, so müssen a_{11} und a_{22} beide dasselbe Vorzeichen haben. Dasselbe Zeichen kommt auch a'_{11} und a'_{22} zu, da $a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22} = s$.

Da ferner $a'_{33} = \frac{D}{\Delta}$ dasselbe Vorzeichen besitzt wie D und $p_1 = -\frac{a'_{33}}{a'_{11}}$, $p_2 = -\frac{a'_{33}}{a'_{22}}$, so folgt, für $\Delta > 0$:

Ellipse ist reell, wenn D entgegengesetztes Vorzeichen wie a_{11} und a_{22},

Ellipse ist imaginär, wenn D dasselbe Vorzeichen wie a_{11} und a_{22}.

Haben übrigens a_{11} und a_{22} entgegengesetzte Vorzeichen, so ist Δ sicher negativ und es liegt ein Hyperbel vor. Selbstverständlich darf man aber nicht umkehren, da Δ auch bei gleichem Vorzeichen von a_{11} und a_{22} negativ werden kann. Ist endlich noch $s = a_{11} + a_{22} = 0$, d. h. $a_{11} = -a_{22}$, so wird auch $a'_{11} = -a'_{22}$, $p_1 = -p_2$. Die Hyperbel wird gleichseitig und umgekehrt. Daher:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung zweiten Grades 1) eine gleichseitige Hyperbel vorstelle, ist $a_{11} = -a_{22}$.

Endlich können nun nochmals die Kriterien für eine Kreisgleichung (vergleiche § 12) aufgefunden werden. Für einen Kreis muss $p_1 = p_2$, also auch $a'_{11} = a'_{22}$, also $\varrho = 0$ sein. Nun ist:

$$\varrho = \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}.$$

Daher kann ϱ nur $= 0$ werden, wenn $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$. (Siehe Seite 139.) Die Formel $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$ giebt dann den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$, wie es sein muss.

Schlusszusammenstellung.

Liegt eine Gleichung vor:

I) $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$

so bilde man aus den Coefficienten folgende Ausdrücke:

1) $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} =$ Diskriminante der Glieder zweiten Grades oder kleine Diskriminante.

2) $D = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23}^2 - a_{22} \cdot a_{31}^2 - a_{33} \cdot a_{12}^2 + 2a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{12},$
$=$ Diskriminante der ganzen Form,
$=$ grosse Diskriminante.

3) $s = a_{11} + a_{22}.$

4) $\varrho = \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}$ (ϱ hat Vorzeichen von a_{12}).

Kriterien:

1) $\Delta > 0$ Ellipse.

1 a) D hat entgegengesetztes Vorzeichen wie a_{11} und a_{22}, so Ellipse reell.

1 b) D hat dasselbe Vorzeichen wie a_{11} und a_{22}, so Ellipse imaginär.

2) $\Delta < 0$ Hyperbel.

Die Koordinaten α und β des Mittelpunktes werden durch die Gleichungen berechnet:

$$a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13} = 0,$$
$$a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23} = 0,$$

worauf a'_{33} sich ergiebt, entweder durch:

$$a'_{33} = a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33},$$

oder durch:

$$a'_{33} = \frac{D}{\Delta}.$$

(Man berechne im gegebenen Falle a'_{33} zur Controle auf beide Arten.)

Substitution:

$$x = x_1 + \alpha$$
$$y = y_1 + \beta$$

und neue Gleichung:

$$\text{I}')\quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + a'_{33} = 0.$$

Man berechne weiter:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \text{ (φ spitz zu nehmen),}$$

$$\left[\sin 2\varphi = \frac{2a_{12}}{\varrho},\ \cos 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{\varrho}\right.$$

$$\left.\cos\varphi = +\sqrt{\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}},\ \sin\varphi = +\sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}}\right].$$

Substitution:

$$x_1 = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi,$$
$$y_1 = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi,$$

und neue Gleichung:

$$\text{I}'')\quad a'_{11}\xi^2 + a'_{22}\eta^2 + a'_{33} = 0,$$

wo:

$$a'_{11} = \frac{s + \varrho}{2},\ a'_{22} = \frac{s - \varrho}{2},$$

oder:

$$\frac{\xi^2}{\left(-\frac{a'_{33}}{a'_{11}}\right)} + \frac{\eta^2}{\left(-\frac{a'_{33}}{a'_{22}}\right)} - 1 = 0.$$

Schlussgleichung.

Aufgaben.

1. Eine Kurve zweiter Ordnung berührt die x-Achse in Punkt A $(+4, 0)$, die y-Achse in Punkt B $(0, +3)$ und geht durch C $(+1, +1)$. Welches ist ihre Gleichung? Transformation auf Mittelpunkt und Hauptachsen.

2. Eine gleichseitige Hyperbel berührt die x-Achse in A $(+4, 0)$, geht durch B $(0, +3)$ und durch C $(+8, +2)$. Gefragt wird nach ihrer Gleichung. Transformation auf Mittelpunkt und Hauptachsen.

§ 18.

Ausnahmefälle und Beispiele zur Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades.

Die im vorigen Paragraphen auseinandergesetzte schöne Theorie erleidet einige Ausnahmen, die jetzt an die Reihe kommen.

I) $\Delta = 0$.

Dann werden im allgemeinen α, β und auch $a'_{33} = \infty$. Der Mittelpunkt liegt unendlich fern, woraus zu schliessen ist, dass aller Wahrscheinlichkeit eine Parabel vorliegen wird. Δ ist die Diskriminante des quadratischen Ausdruckes:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

der ungeformt werden kann in:

$$a_{11}\left[\left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y\right)^2 + \frac{\Delta}{a_{11}{}^2}y^2\right].$$

Wird daher $\Delta = 0$, so lassen sich die drei Glieder in ein Quadrat, nämlich

$$a_{11}\left[x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y\right]^2$$

zusammenziehen und die gegebene Gleichung kann dann so geschrieben werden:

$$a_{11}\left[x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y\right]^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad \mathbf{1)}$$

Da die Glieder ersten Grades hier durch Parallelverschiebung nicht zum Verschwinden gebracht werden können, so versuche man es diesmal erst mit der Drehung:

$$x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi,$$
$$y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi.$$

Dies eingesetzt giebt:

$$a_{11}\left[x_1\left(\cos\varphi + \frac{a_{12}}{a_{11}}\sin\varphi\right) + y_1\left(-\sin\varphi + \frac{a_{12}}{a_{11}}\cos\varphi\right)\right]^2$$
$$+ 2\,(a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi)\,x_1 + 2\,(-a_{13}\sin\varphi + a_{23}\cos\varphi)y_1$$
$$+ a_{33} = 0.$$

Um diese Gleichung möglichst der Scheitelgleichung $x^2 - 2py = 0$ zu nähern, setze man in dem quadratischen Glied den Coefficienten von $y_1 = 0$, also:

$$-\sin\varphi + \frac{a_{12}}{a_{11}}\cos\varphi = 0,$$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_{12}}{a_{11}}$, oder auch, da $\Delta = 0$, d. h. $\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{21}}$,

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_{22}}{a_{21}}$.[1])

Diese Gleichung giebt zwei entgegengesetzte Richtungen für φ. Wir wollen vorläufig φ concav, also $\sin\varphi$ positiv nehmen. Wird zur Abkürzung gesetzt:

$$\varrho = \pm\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2},$$

so folgt:

$$\sin\varphi = \frac{a_{12}}{\varrho},\ \cos\varphi = \frac{a_{11}}{\varrho}$$

und da $\sin\varphi$ positiv sein soll, so hat ϱ das Vorzeichen von a_{12}.

Eingesetzt giebt

$$\cos\varphi + \frac{a_{12}}{a_{11}}\sin\varphi = \frac{1}{\varrho}\left(a_{11} + \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right) = \frac{\varrho}{a_{11}}.$$

Daher wird das quadratische Glied:

$$a_{11}\,x_1^2 \cdot \frac{\varrho^2}{a_{11}^2} = x_1^2 \cdot \frac{a_{11}^2 + a_{12}^2}{a_{11}} = x_1^2 \cdot (a_{11} + a_{22}) = x_1^2 \cdot s$$

(da hier $a_{12}^2 = a_{11} \cdot a_{22}$)

und die neue Gleichung nimmt die Gestalt an:

$$s x_1^2 + 2a'_{13}x_1 + 2a'_{23}y_1 + a_{33} = 0,$$

wo:

$$a'_{13} = a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi = \frac{a_{13}a_{11} + a_{23}a_{12}}{\varrho},$$

$$a'_{23} = -\,a_{13}\sin\varphi + a_{23}\cos\varphi = \frac{-\,a_{13}a_{12} + a_{23}a_{11}}{\varrho}.$$

Wird y_1 hieraus explicite dargestellt, so folgt eine Gleichung von der Form:

$$y_1 = A + 2Bx_1 + Cx_1^2, \qquad \mathbf{1'})$$

also $y_1 =$ einer ganzen Funktion zweiten Grades von x_1.

Die Gleichung 1') hat schon grosse Aehnlichkeit mit der Scheitelgleichung der Parabel $y = \frac{x^2}{2p}$ (wenn die Scheitel-

---

[1]) Diese Formel giebt:

$$\operatorname{tg}2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{2\frac{a_{12}}{a_{11}}}{1 - \frac{a_{22}}{a_{11}}} = \frac{2\,a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

also genau dieselbe Gleichung wie früher. Hier aber nimmt man von vornherein am besten den Winkel φ selbst, eben weil $tg\ \varphi$ in diesem Falle so einfach ausgedrückt werden kann.

tangente mit der x-Achse zusammenfällt), nur ist noch rechts die Constante A und das Glied ersten Grades zum Verschwinden zu bringen.

Daher verschiebe man nunmehr parallel und setze:

$$x_1 = \xi + a,$$
$$y_1 = \eta + \beta,$$

worauf 1') verwandelt wird in:

$$\eta + \beta = A + 2B(\xi + a) + C(\xi + a)^2,$$

oder:

$$\eta = [-\beta + A + 2Ba + Ca^2] + 2\xi(B + Ca) + C\xi^2.$$

Mithin ist zu setzen:

$$B + Ca = 0,$$
$$-\beta + A + 2Ba + Ca^2 = 0,$$

also:

$$a = -\frac{B}{C}$$

und:

$$\beta = A - \frac{B^2}{C} = \frac{AC - B^2}{C}.$$

a und β sind dann die Koordinaten des Scheitels der Parabel im System x_1, y_1, denn jetzt endlich lautet die Gleichung:

$$\eta = C \cdot \xi^2 \qquad \mathbf{1'')}$$

und sie ist mit der Scheitelgleichung der Parabel identisch, wenn $C = \frac{1}{2p}$, also $p = \frac{1}{2C}$ gesetzt wird. (Sollte C negativ sein, so ist $p = -\frac{1}{2C}$ zu setzen, aber noch um 180^0 weiter zu drehen.)

Das im vorigen Paragraphen gegebene Kriterium kann also so erweitert werden:

$$\varDelta \gtreqless 0 \quad \begin{array}{l}\text{Ellipse,}\\ \text{Parabel,}\\ \text{Hyperbel.}\end{array}$$

Anmerkungen. 1. Die Gleichung:

$$y = a + bx + cx^2$$

stellt, wie oben bewiesen, eine Parabel dar. Sie wird ihrer Einfachheit wegen vielfach zur Interpolation zwischen drei gegebenen Punkten benutzt, indem man a, b, c so bestimmt, dass die Parabel durch sie hindurchgeht. Sind aber mehr Punkte

gegeben, so reicht diese Form nicht mehr aus, und man setzt dann:

$$y = a + bx + cx^2 \dots + kx^n.$$

Die so gefundene Kurve wird dann als parabolische Kurve n^{ter} Ordnung bezeichnet. 2. Das Kriterium sagt aus, dass die Art der Kurven einzig und allein von den Coefficienten der Glieder zweiten Grades abhängt. Ueberhaupt besteht der ganze Unterschied zwischen den drei Kegelschnitten nur in dem Verhalten in Bezug auf die unendlich ferne Gerade. Die Ellipse hat mit ihr zwei imaginäre Punkte gemeinsam (für den Kreis sind es die beiden unendlichen fernen imaginären Kreispunkte), die Hyperbel zwei reelle Punkte, während für die Parabel diese beiden Punkte zusammenfallen. Die Richtungen, in welchen eine Kurve n^{ter} Ordnung in die Unendlichkeit geht, werden bestimmt, indem die Gleichung auf die Glieder höchsten Grades beschränkt und dann $\frac{y}{x} = m$, $y = mx$ gesetzt wird. Die Richtungscoefficienten der Asymptoten der Kurven zweiten Grades werden daher durch die Gleichung:

$$a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2 = 0$$

ermittelt, aus welcher Gleichung dann wieder sofort das obige Kriterium folgt. Da nun die Achsenrichtungen die Winkel der Asymptoten halbiren und ausserdem das Verhältniss der Achsenlängen $\frac{b}{a}$ auch nur von dem Asymptotenwinkel abhängt, so ist klar (wie übrigens die Formeln des vorigen Paragraphen sofort bestätigen):

Achsenrichtungen und Achsenverhältniss hängen nur von $a_{11} : a_{12} : a_{22}$, d. h. von den Coefficienten der Glieder höchsten Grades ab.

II) $D = 0$.

Nach dem vorigen Paragraphen wird dann auch $a'_{33} = \frac{D}{\Delta} = 0$, und durch Paralleltransformation erhält die Gleichung die Gestalt:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 = 0,$$

d. h. ausser den Gliedern ersten Grades ist auch die Constante verschwunden. In diesem Falle hat man nicht nöthig noch zu drehen, denn die linke Seite ist das Produkt von:

$$a_{11}\left[x_1+\frac{a_{12}+\sqrt{-\Delta}}{a_{11}}y_1\right]\left[x_1+\frac{a_{12}-\sqrt{-\Delta}}{a_{11}}y_1\right]$$

d. h. die Gleichung stellt zwei gerade Linien vor. Daher:

$D = 0$ ist die Bedingung für das Zerfallen der Kurve zweiter Ordnung in zwei Gerade. Wenn Δ negativ, so sind die beiden geraden Linien reell, wenn Δ positiv, so imaginär (mit reellem Durchschnittspunkt, in den dann die Ellipse zusammenschrumpft).

III) $D = 0$ und $\Delta = 0$,

also:

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

und:

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23}^2 - a_{22} \cdot a_{31}^2 - a_{33} \cdot a_{12}^2 + 2a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{12} = 0.$$

Vermöge der ersten Gleichung hebt sich in der letzten das erste gegen das vierte Glied. Multiplicirt man dann in dieser noch mit a_{11} und setzt noch einmal a_{12}^2 für $a_{11} \cdot a_{22}$, so folgt:

$$-a_{11}^2 \cdot a_{23}^2 - a_{12}^2 \cdot a_{31}^2 + 2a_{12} \cdot a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{11} = 0,$$

d. h.

$$(a_{11} \cdot a_{23} - a_{12} \cdot a_{31})^2 = 0,$$

oder:

$$a_{11} \cdot a_{23} - a_{12} \cdot a_{31} = 0.$$

Ebenso leitet man ab:

$$a_{21} \cdot a_{23} - a_{22} \cdot a_{31} = 0.$$

Die im § 17 Seite 203 gefundenen Formeln für die Koordinaten des Mittelpunktes α und β geben daher hier $\frac{0}{0}$ und die beiden zugehörigen Gleichungen desselben §, nämlich:

$$a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13} = 0$$
$$a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23} = 0$$

stellen, wenn α und β als Koordinaten eines Punktes genommen werden, ein und dieselbe gerade Linie dar. Die vorgelegte Kurve hat nicht nur einen Mittelpunkt, sondern eine ganze Mittellinie!

Wie ist dies möglich?

Es ist hier:

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{a_{31}}{a_{32}}$$

Setzt man den gemeinsamen Werth dieser Brüche $= \lambda$, so folgt:

$$a_{31} = \lambda a_{32}$$
$$a_{21} = \lambda a_{22}$$
$$a_{11} = \lambda a_{21} = \lambda^2 a_{22}.$$

Durch Einsetzen in die allgemeine Gleichung erhält diese die Gestalt:

$$\lambda^2 a_{22} x^2 + 2\lambda a_{22} xy + a_{22} y^2 + 2\lambda a_{23} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0$$

oder:

$$a_{22}(y + \lambda x)^2 + 2a_{23}(y + \lambda x) + a_{33} = 0,$$

d. h. für:

$$y + \lambda x = z,$$
$$a_{22} z^2 + 2a_{23} z + a_{33} = 0.$$

Sind z_1 und z_2 die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung, so wird entweder:

$$x + \lambda y = z_1$$

oder:

$$x + \lambda y = z_2.$$

Dies sind zwei parallele gerade Linien (reell oder imaginär). Und in der That kann jeder Punkt der Mittellinie dieser Parallelen als Mittelpunkt genommen werden.

Sind endlich noch die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$a_{22} z^2 + 2a_{23} z + a_{33} = 0$$

einander gleich, so fallen die beiden Parallelen mit ihrer Mittellinie zusammen. Die linke Seite der vorgelegten Gleichung ist ein reines Quadrat von der Form

$$(ax + by + c)^2$$

und es wird durch sie die gerade Linie

$$ax + by + c = 0$$

doppelt dargestellt. Sie ist eine „Doppellinie".

Zu der in III) erläuterten Ausnahme gehört auch der Fall, dass $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ ist, weil dann augenscheinlich D und auch Δ verschwinden. Die Gleichung reducirt sich auf den ersten Grad:

$$2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0$$

und stellt eine gerade Linie vor. Will man sie aber hier doch als die Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung nehmen, so muss man die linke Seite als Produkt

$$(2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33})(0x + 0y + 1) = 0$$

ansehen, dessen zweiter Faktor $= 0$ gesetzt die unendlich ferne Gerade giebt.

(Ist endlich $a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{13} = a_{23} = 0$, so fällt auch die erste Gerade in's Unendliche, die Kurve ist die unendlich ferne Gerade, als Doppellinie genommen.)

Das Hauptergebniss der Untersuchungen der beiden letzten Paragraphen ist die Erkenntniss, dass „Kurve zweiter Ordnung“ mit „Kegelschnitt“ identisch ist.

Numerische Beispiele.

1. Beispiel:

In § 8 Seite 103 war die Gleichung derjenigen Kurve zweiter Ordnung abgeleitet worden, welche durch die fünf Punkte (siehe die dortige Figur 46):

$P_1(-1,0)$, $P_2(+5,0)$, $P_3(0,+3)$, $P_4(0,-2)$, $P_5(+2,+3)$

geht. Sie lautet:

$$6x^2 + 4xy + 5y^2 - 24x - 5y - 30 = 0,$$

also: $a_{11} = +6$, $a_{12} = +2$ (nicht $= +4$), $a_{22} = +5$,

$a_{13} = -12$ (nicht $= -24$), $a_{23} = -\frac{5}{2}$ (nicht $= -5$), $a_{33} = -30$.

Es ist:

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = +26, \text{ also Ellipse!}$$

$$D = -900 - \frac{75}{2} - 720 + 120 + 120 = -\frac{2835}{2}$$

(D ist negativ, a_{11}, a_{22} positiv, also Ellipse reell).

$s = 11$, $\varrho = +\sqrt{1+16} = +\sqrt{17}$ ($+$ da a_{12} positiv).

Mittelpunkt: $6\alpha + 2\beta - 12 = 0$

$$2\alpha + 5\beta - \frac{5}{2} = 0$$

$$\alpha = +\frac{55}{26} = +2{,}11\ldots$$

$$\beta = -\frac{9}{26} = -0{,}34\ldots$$

$$a'_{33} = a_{31}\,\alpha + a_{32}\,\beta + a_{33}$$

$$= -\frac{660}{26} + \frac{45}{52} - 30 = -\frac{2835}{52}$$

$$\left(\text{stimmt mit } a'_{33} = \frac{D}{\Delta} = -\frac{2835}{52}\right).$$

Substitution: $x = x_1 + \frac{55}{26}$, $y = y_1 - \frac{9}{26}$.

Neue Gleichung: $6x_1^2 + 4x_1y_1 + 5y_1^2 - \frac{2835}{52} = 0$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = +4, \ (\varphi \text{ spitz}),$$

$$2\varphi = 75^0\ 57{,}8'$$
$$\varphi = 37^0\ 58{,}9'$$

$$\sin 2\varphi = \frac{4}{+\sqrt{17}},\ \cos 2\varphi = \frac{1}{+\sqrt{17}},\ \cos\varphi = +\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{17}}\right)},$$
$$\sin\varphi = +\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)}.$$

$$a'_{11} = \frac{s+\varrho}{2} = \frac{11+\sqrt{17}}{2},\ a'_{22} = \frac{s-\varrho}{2} = \frac{11-\sqrt{17}}{2}.$$

Substitution:

$$x = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi,$$
$$y = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi.$$

Neue Gleichung:

$$\frac{11+\sqrt{17}}{2}\xi^2 + \frac{11-\sqrt{17}}{2}\eta^2 - \frac{2835}{52} = 0,$$

oder:

$$\frac{\xi^2}{\dfrac{2835}{26(11+\sqrt{17})}} + \frac{\eta^2}{\dfrac{2835}{26(11-\sqrt{17})}} - 1 = 0.$$

Halbachsen:

$$a = \sqrt{\frac{2835}{26(11-\sqrt{17})}} = \frac{\sqrt{2835(11+\sqrt{17})}}{52} = 3{,}9818\ldots$$

(liegt auf η-Achse),

$$b = \sqrt{\frac{2835}{26(11+\sqrt{17})}} = \frac{\sqrt{2835(11-\sqrt{17})}}{52} = 2{,}6854\ldots$$

(liegt auf ξ-Achse).

2. Beispiel.

Gegebene Gleichung (Fig. 69):

$$-3x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 9 = 0$$
$$\Delta = -3 - 4 = -7 \text{ (—, also Hyperbel).}$$
$$D = +27 + 27 - 1 + 36 + 12 = +101.$$
$$\varrho = -\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}{}^2} = -4\sqrt{2} \text{ (—, da } a_{12} \text{ negativ).}$$

Mittelpunkt: $-3\alpha - 2\beta - 1 = 0$

$$-2\alpha + \beta + 3 = 0$$
$$\alpha = +\frac{5}{7},\ \beta = -\frac{11}{7}.$$

$$a'_{33} = a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33} = -\frac{5}{7} - \frac{33}{7} - 9 = -\frac{101}{7}$$

$$\left(\text{stimmt mit } a'_{33} = \frac{D}{\Delta} = \frac{+101}{-7}\right).$$

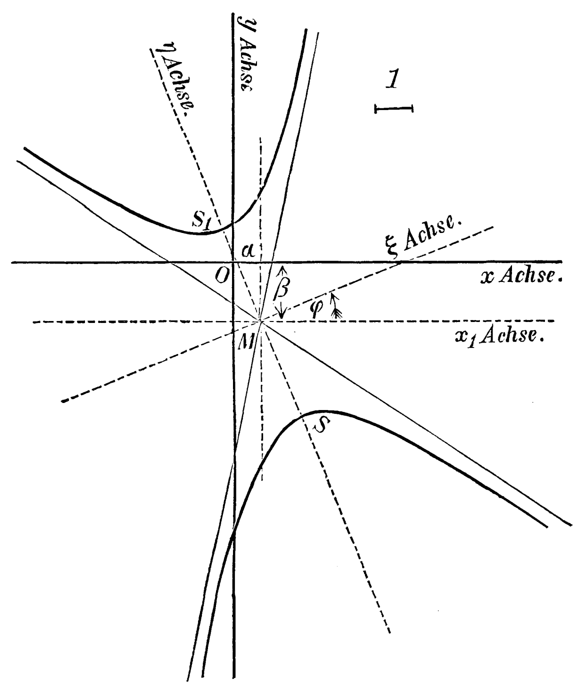


Fig. 69.

Substitution:

$$x = x_1 + \frac{5}{7}, \quad y = y_1 - \frac{11}{7}.$$

Neue Gleichung:

$$-3x_1^2 - 4x_1y_1 + y_1^2 - \frac{101}{7} = 0,$$

$$tg\, 2\varphi = \frac{-4}{-4} = +1,\ 2\varphi = 45^0,\ \varphi = 22\tfrac{1}{2}{}^0,$$

$$\sin 2\varphi = \cos 2\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2},\ \cos\varphi = +\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)},$$

$$\sin\varphi = +\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

$$a'_{11} = \frac{s+\varrho}{2} = -1 - 2\sqrt{2},\quad a'_{22} = \frac{s-\varrho}{2} = -1 + 2\sqrt{2}.$$

Substitution:

$$x_1 = \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi,$$
$$y_1 = \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi.$$

Neue Gleichung:

$$-(1+2\sqrt{2})\,\xi^2 + (-1+2\sqrt{2})\,\eta^2 - \frac{101}{7} = 0$$

oder

$$-\frac{\xi^2}{\dfrac{101}{7(2\sqrt{2}+1)}} + \frac{\eta^2}{\dfrac{101}{7(2\sqrt{2}-1)}} - 1 = 0.$$

Halbachse:

$$a = \text{reelle Halbachse} = \sqrt{\frac{101}{7(2\sqrt{2}-1)}} = \frac{\sqrt{101(2\sqrt{2}+1)}}{7}$$
$$= 2{,}8091 \text{ (liegt auf der } \eta\text{-Achse)},$$

$$b = \text{imaginäre Halbachse} = \sqrt{\frac{101}{7(2\sqrt{2}+1)}} = \frac{\sqrt{101(2\sqrt{2}-1)}}{7}$$
$$= 1{,}9413 \text{ (liegt auf der } \xi\text{-Achse)}.$$

Asymptotenwinkel:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+1}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{7}},\quad \psi = 34^0\ 38{,}8'.$$[1]

3. Beispiel:

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 - 10x - 18y - 20 = 0$$
$$\Delta = 0, \text{ also Parabel.}$$
$$9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x-2y)^2,$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{21}} = -\frac{2}{3},\ (\varphi \text{ concav}).$$
$$\varphi = 180^0 - 33^0\ 41{,}4' = 146^0\ 18{,}6'.$$
$$\sin\varphi = +\frac{2}{\sqrt{13}},\quad \cos\varphi = -\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

---

[1]) Die Hyperbel ist in Fig. 69 nach den eben berechneten Werthen gezeichnet worden. Die Zeichnung selbst giebt dann hinterher leicht gute Kontrole für die Richtigkeit der Rechnung. Man suche z. B. die Schnittpunkte mit der (alten) y-Achse, indem man in die vorgelegte Gleichung $x = 0$ setzt. Es folgt:

$$y^2 + 6y - 9 = 0,\ y_1 = +1{,}2426,\ y_2 = -7{,}2426.$$

(Stimmt gut mit der Zeichnung.)

Substitution:

$$x = x_1 \cdot -\frac{3}{\sqrt{13}} - y_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}},$$

$$y = x_1 \cdot \frac{2}{13} + y_1 \cdot -\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

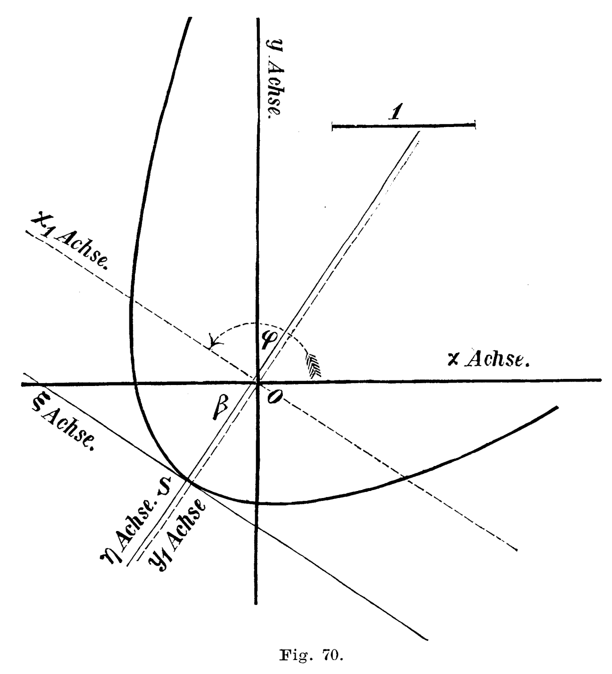


Fig. 70.

Daher:

$$3x - 2y = -x_1 \sqrt{13},$$

$$-10x - 18y = -\frac{6}{\sqrt{13}} x_1 + \frac{74}{\sqrt{13}} y_1,$$

und neue Gleichung:

$$13 x_1^2 - \frac{6x_1}{\sqrt{13}} + \frac{74 y_1}{\sqrt{13}} - 20 = 0, \text{ oder}$$

$$y_1 = \frac{20\sqrt{13}}{74} + \frac{3}{37} x_1 - \frac{13\sqrt{13}}{74} x_1^2.$$

Substitution:

$$x_1 = \xi + \alpha$$
$$y_1 = \eta + \beta$$

giebt:

$$\eta + \beta = \frac{20\sqrt{13}}{74} + \frac{3}{37}\xi + \frac{3}{37}\alpha - \frac{13\sqrt{13}}{74}\xi^2$$
$$- \frac{26\sqrt{13}}{74}\xi\alpha + \frac{13\sqrt{13}}{74}\alpha^2.$$

Daher:

$$\frac{3}{37} - \frac{26\sqrt{13}}{74}\alpha = 0,\ \alpha = \frac{3}{13\sqrt{13}} = + 0{,}06400.$$

$$\beta = \frac{20\sqrt{13}}{74} + \frac{9}{37\cdot 13\sqrt{13}} - \frac{13\sqrt{13}}{74}\cdot\frac{9}{13^2\cdot 13} = \frac{20\sqrt{13}}{74}$$
$$+ \frac{9}{37\cdot 26\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}\cdot 3389}{74\cdot 169} = + 0{,}9714.$$

Endgleichung:

$$\eta = - \frac{13\cdot\sqrt{13}}{74}\xi^2 = - \frac{\xi^2}{2p}.$$

Die Hauptachse fällt in die Richtung der $-\eta$-Achse und es ist

$$p = \frac{37\sqrt{13}}{169} = 0{,}78937.$$

4. Beispiel.

$$6x^2 + xy - 12y^2 + x + 44y - 40 = 0$$
$$\Delta = - 72 - \frac{1}{4} = - \frac{289}{4},\ \text{also Hyperbel}$$
$$D = + 2880 - 2904 + 3 + 10 + 11 = 0.$$

Die Hyperbel artet in zwei reelle gerade Linien aus.

Mittelpunkt (Durchschnittspunkt der beiden Linien):

$$\left.\begin{aligned} 6\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} &= 0 \\ \frac{\alpha}{2} - 12\beta + 22 &= 0 \end{aligned}\right| \begin{aligned} \alpha &= - \frac{4}{17} \\ \beta &= + \frac{31}{17} \end{aligned}$$

$$a'_{33} = a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33} = 0\ (D = 0!).$$

Substitution:

$$x = x_1 - \frac{4}{17},\ y = y_1 + \frac{31}{17}$$

und neue Gleichung:

$$6x_1^2 + x_1y_1 - 12y_1^2 = 0$$

oder

$$(2x_1 + 3y_1)\cdot(3x_1 - 4y_1) = 0,$$

also zwei reelle Gerade.

Setzt man hier für x_1 und y_1 zurück: $x_1 = x + \frac{4}{17}$, $y_1 = y - \frac{31}{17}$, so werden ihre Gleichungen im ursprünglichen System:

$$2x + 3y - 5 = 0$$
$$3x - 4y + 8 = 0$$

und man überzeugt sich sofort, dass durch Ausmultiplication in der That die vorgelegte Gleichung wieder entsteht.[1])

5. Beispiel:

$$9x^2 - 12\,xy + 4y^2 + 18x - 12y - 7 = 0.$$

Hier ist $\varDelta = 0$, also Parabel.

Die Gleichung kann so geschrieben werden:

$$(3x - 2y)^2 + 6\,(3x - 2y) - 7 = 0,$$

oder für:

$$3x - 2y = z$$
$$z^2 + 6z - 7 = 0$$
$$z_1 = +1,\ z_2 = -7.$$

Daher entweder:

$$3x - 2y - 1 = 0$$

oder:

$$3x - 2y + 7 = 0,$$

d. h. die Parabel artet in zwei parallele gerade Linien aus.

Wäre der letzte Coefficient $= +9$, statt -7 gewesen, so würde $z_1 = z_2 = 3$ geworden sein, und die beiden Linien würden sich zu einer einzigen

$$3x - 2y + 3 = 0$$

vereinigt haben, welche die Mittellinie des vorigen Linienpaares ist. Würde statt -7 aber eine Zahl $> +9$ gestanden haben, so wären die beiden Geraden imaginär geworden.

Aufgaben.

1. Eine Parabel berührt die x-Achse in $A\ (+4, 0)$, die y-Achse in $B\ (0, +3)$. Wie lautet ihre Gleichung? Transformation auf Scheitel und Scheiteltangente.

---

[1]) Dies Beispiel ist dem § 6 Seite 75 entnommen, nur dass die Faktoren, die dort gegeben waren, hier erst aufgefunden werden mussten.

2. Unter allen gleichseitigen Hyperbeln, deren Gleichungen von der Form sind:

$$xy - 1 + \lambda(x + y - 5) = 0,$$

sollen diejenigen gefunden werden, welche in zwei gerade Linien zerfallen.

3. Gegeben die Ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$ und die Sekante $2x + y - 5 = 0$. Gesucht die Gleichung der beiden Tangenten in den Schnittpunkten der Sekante mit der Ellipse.

Vierter Abschnitt.

§ 19—26.

---

§ 19.

Der Transversalensatz. Der Pascal'sche und der Brianchon'sche Satz.

Der dritte Abschnitt hat Ellipse, Hyperbel und Parabel gesondert betrachtet, wie auch die in den letzten §§ enthaltene Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades hauptsächlich den Zweck hatte, die Art der Kurve zu bestimmen. Dieser vierte und letzte Abschnitt aber soll einen allgemeineren und höheren Standpunkt vertreten, insofern er nicht die Eigenschaften der verschiedenen Kurven zweiter Ordnung, sondern eine umfassende Theorie der Kurve zweiter Ordnung überhaupt enthält.

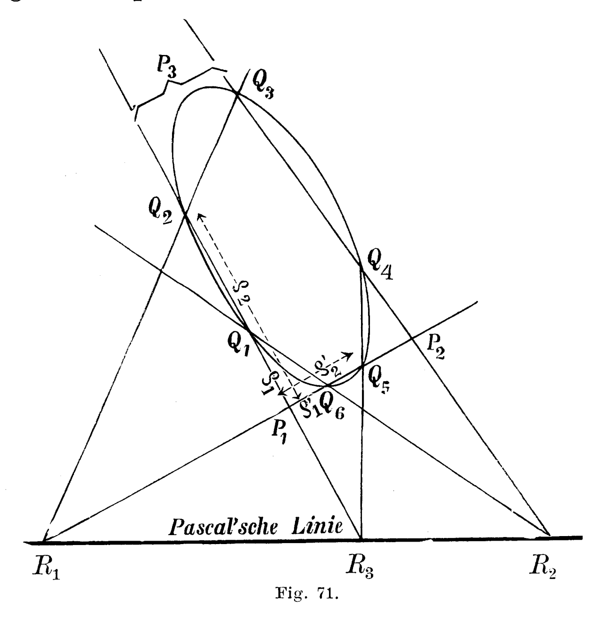


Fig. 71.

Es sei ein beliebiger Kegelschnitt in rechtwinkligen Koordinaten vorgelegt (Fig. 71):

$$F(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad \mathbf{1)}$$

Von einem Punkte $P_1(\xi, \eta)$ sei eine Gerade mit dem Richtungswinkel φ gezogen, die den Kegelschnitt in zwei Punkten trifft. Einen derselben bezeichne man mit $Q(x,y)$ und nenne ϱ seinen Abstand von P. Dann ist:

$$x = \xi + \varrho \cos\varphi,$$
$$y = \eta + \varrho \sin\varphi.$$

Dies in 1) eingesetzt (denn x,y soll auf 1) liegen), giebt:

$$a_{11}(\xi + \varrho \cos\varphi)^2 + 2a_{12}(\xi + \varrho\cos\varphi)(\eta + \varrho\sin\varphi) + \ldots = 0,$$

oder nach Potenzen von ϱ entwickelt:

$$A\varrho^2 + 2B\varrho + C = 0,$$

wo:

$$A = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi,$$
$$C = a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + \ldots = F(\xi,\eta).$$

(B, das uns hier nicht interessirt, ist auch nicht aufgeschrieben.)

Diese quadratische Gleichung giebt zwei Werthe für ϱ, entsprechend den beiden Schnittpunkten Q_1 und Q_2. Daher:

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = + \frac{C}{A} = \frac{F(\xi,\eta)}{a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi}.^{1)} \quad \mathbf{2)}$$

Für einen Kreis ist $a_{11} = a_{22}$ (man setze beide $= 1$) und $a_{12} = 0$. Der Nenner reducirt sich dann auf 1 und man erhält:

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = F(\xi,\eta),$$

also von φ unabhängig. Dies ist der bekannte Satz, dass das Produkt der Sekantenabschnitte einer durch einen beliebigen Punkt gezogenen Sekante von der Richtung gar nicht abhängt und gleich der Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis ist.

Aber auch für einen beliebigen Kegelschnitt können aus der Gleichung 2) wichtige Folgerungen abgeleitet werden. Man ziehe durch P_1 noch eine zweite Sekante unter dem Winkel φ_1 und nenne die entsprechenden Sekantenabschnitte ϱ'_1 und ϱ'_2, so folgt:

---

[1]) Wenn $\varrho_1\varrho_2$ positiv, so liegen Q_1 und Q_2 auf derselben Seite von P_1, wenn $\varrho_1\varrho_2$ negativ, so auf verschiedenen Seiten.

$$\varrho'_1 \cdot \varrho'_2 = \frac{F(\xi, \eta)}{a_{11}\cos^2\varphi_1 + 2a_{12}\cos\varphi_1\sin\varphi_1 + a_{22}\sin^2\varphi_1}$$

und daher:

$$\frac{\varrho_1 \cdot \varrho_2}{\varrho'_1 \cdot \varrho'_2} = \frac{a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi}{a_{11}\cos^2\varphi_1 + 2a_{12}\cos\varphi_1\sin\varphi_1 + a_{22}\sin^2\varphi_1}, \quad 3)$$

d. h. unabhängig von ξ und η; also:

Zieht man durch irgend einen Punkt zwei Sekanten an einen Kegelschnitt, so ist das Verhältniss der Produkte aus den Sekantenabschnitten nur von den Richtungen der Sekanten abhängig, von der Lage dieses Punktes aber unabhängig.

Ein entsprechender Satz gilt für alle algebraische Kurven (für die Gerade ist er sofort klar), nur muss man das Produkt aus allen Sekantenabschnitten nehmen. Auch kommen, wie das Beispiel zeigt, von den Coefficienten nur die der Glieder höchsten Grades in Betracht.

Wenn $a_{12} = 0$, d. h. wenn die Koordinatenachsen die Richtungen der Hauptachsen haben, so geht das Verhältniss über in:

$$\frac{\varrho_1\,\varrho_2}{\varrho'_1\varrho'_2} = \frac{a_{11}\cos^2\varphi + a_{22}\sin^2\varphi}{a_{11}\cos^2\varphi_1 + a_{22}\sin^2\varphi_1}.$$

Wird hier $\varphi_1 = -\varphi$ gesetzt, d. h. werden zwei Richtungen genommen, die zur einen (also auch zur anderen) Hauptachse gleich geneigt sind, so wird $\cos^2\varphi_1 = \cos^2\varphi$, $\sin^2\varphi_1 = \sin^2\varphi$ und daher:

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \varrho'_1 \cdot \varrho'_2.$$

Die vier Schnittpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 liegen dann auf einem Kreise. (Fig. 72.)

Aber auch umgekehrt, wenn die vier Punkte auf einem Kreise liegen, also $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \varrho'_1 \cdot \varrho'_2$ ist, so folgt:

$$a_{11}\cos^2\varphi + a_{22}\sin^2\varphi = a_{11}\cos^2\varphi_1 + a_{22}\sin^2\varphi_1,$$

oder nach Wegschaffung des Sinus:

$$(a_{11} - a_{22})\cos^2\varphi = (a_{11} - a_{22})\cos^2\varphi_1,$$

also entweder:

$$a_{11} = a_{22},$$

d. h. der Kegelschnitt selbst ist ein Kreis,

oder: $\cos^2\varphi_1 = \cos^2\varphi$,

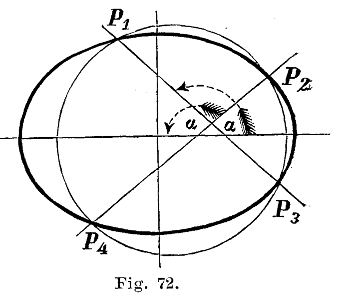


Fig. 72.

also auch $\operatorname{tg}^2\varphi = \operatorname{tg}^2\varphi_1$, oder $m^2 = m_1^2$. Daher entweder:

$m_1 = m$ (die beiden Sekanten fallen zusammen),

oder:

$m_1 = -m$, d. h. die beiden Sekanten sind gegen die Hauptachse gleich geneigt.

Bemerkung: Fallen zwei der Schnittpunkte (in Fig. 72) zusammen, d. h. berührt der Kreis den Kegelschnitt, während er ihn ausserdem noch in zwei andern Punkten schneidet, so ist die Verbindungslinie der letzteren gegen die Hauptachse mit der Tangente gleich geneigt. Fallen aber gar drei der Schnittpunkte in einem zusammen, d. h. geht der Kreis in den sogenannten Krümmungskreis im Berührungspunkt über und bleibt nur der vierte Schnittpunkt für sich allein, so geht die zweite Sekante in die Verbindungslinie des Berührungspunktes mit diesem Schnittpunkt über, womit folgende einfache, von Steiner gefundene Construktion des Krümmungskreises gegeben ist.

Man ziehe in dem Berührungspunkt die Tangente und zeichne durch denselben Punkt diejenige Gerade, welche mit der Tangente gegen die grosse Achse (oder auch gegen die kleine Achse) gleich geneigt ist. Dann geht der Krümmungskreis durch den zweiten Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Kegelschnitt hindurch.

Um noch eine Anwendung der Formel 3) zu geben, möge die Bedingung $a_{12} = 0$ wieder fallen gelassen und dafür die folgende:

$$a_{11} + a_{22} = 0, \quad a_{22} = -a_{11}$$

eingeführt werden, die nach § 17 Seite 209 aussagt, dass der Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel ist.

Dann wird:

$$\frac{\varrho_1 \cdot \varrho_2}{\varrho'_1 \cdot \varrho'_2} = \frac{a_{11}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi}{a_{11}(\cos^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_1) + 2a_{12}\sin\varphi_1\cos\varphi_1}.$$

Nimmt man hier durch P (Fig. 73)[1]) zwei zu einander senkrechte Richtungen an, also $\varphi_1 = 90^0 + \varphi$, $\sin\varphi_1 = \cos\varphi$, $\cos\varphi_1 = -\sin\varphi$, so wird in dem Bruch rechts der Zähler entgegengesetzt gleich dem Nenner, so dass

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = -\varrho'_1 \cdot \varrho'_2.$$

Diese Gleichung sagt aber nach einem sehr bekannten Satz der Elementarmathematik aus, dass D Höhendurchschnittspunkt des Dreiecks ABC, oder was dasselbe ist, A Höhendurch-

[1]) P Schnittpunkt von BC und AD.

schnittspunkt des Dreiecks BCD u. s. w. ist. Und da die Umkehrung auch richtig ist, wie durch die umgekehrte Beweisart folgen würde, so haben wir den Satz gewonnen:

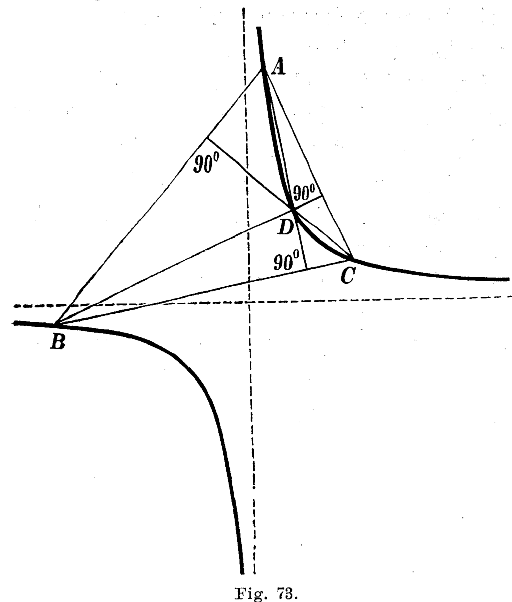


Fig. 73.

Wenn eine gleichseitige Hyperbel durch die Ecken eines Dreiecks hindurchgeht, so geht sie auch durch den Höhendurchschnittspunkt und umgekehrt; wenn ein Kegelschnitt durch diese vier Punkte hindurchgeht, so ist er eine gleichseitige Hyperbel.

Ist das Dreieck rechtwinklig, so fällt der Höhendurchschnitt mit der Ecke des rechten Winkels zusammen und der Satz erhält die Gestalt:

Geht eine gleichseitige Hyperbel durch die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks, so ist die Tangente an der Ecke des rechten Winkels die Höhe auf der Hypotenuse und umgekehrt; geht ein Kegelschnitt etc.

Gegeben sei wieder der Kegelschnitt (Fig. 71):

$$F(xy) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad \mathbf{1)}$$

und zwei Punkte $P_1(\xi_1, \eta_1)\, P_2(\xi_2, \eta_2)$.

Nach § 8 Seite 92 wird dann ein beliebiger Punkt Q auf der Verbindungslinie P_1P_2 durch die Formeln

$$x = \frac{\xi_1 - \lambda\xi_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{\eta_1 - \lambda\eta_2}{1 - \lambda}$$

dargestellt, wobei λ dass Verhältniss von Q zu P_1 und P_2 bedeutet. Soll Q auf dem Kegelschnitt liegen, so findet man durch Einsetzen in 1) nach Fortschaffung des Nenners $(1 - \lambda)^2$:

$$a_{11}(\xi_1 - \lambda\xi_2)^2 + 2a_{12}(\xi_1 - \lambda\xi_2)(\eta_1 - \lambda\eta_2) \ldots\ldots + a_{33}(1 - \lambda)^2 = 0$$

oder

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0.$$

Hier ist $A = F(\xi_2, \eta_2)$, $C = F(\xi_1, \eta_1)$, während B, das jetzt nicht in Betracht kommt, sowohl von ξ_1, η_1, als auch von ξ_2, η_2 abhängt. Die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 entsprechen natürlich den beiden Punkten Q_1 und Q_2. Es ist also:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{C}{A} = \frac{F(\xi_1, \eta_1)}{F(\xi_2, \eta_2)}.$$

Nimmt man noch einen dritten Punkt $P_3(\xi_3, \eta_3)$[1] hinzu und bezeichnet, cyklisch von P_1 nach P_2, von P_2 nach P_3 und von P_3 nach P_1 gehend mit:

λ_1 und λ_2 die Verhältnisse von Q_1 und Q_2 zu P_1 und P_2
λ_3 und λ_4 die Verhältnisse von Q_3 und Q_4 zu P_2 und P_3
λ_5 und λ_6 die Verhältnisse von Q_5 und Q_6 zu P_3 und P_1

so ergiebt die vorige Gleichung:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{F(\xi_1, \eta_1)}{F(\xi_2, \eta_2)};\ \lambda_3 \cdot \lambda_4 = \frac{F(\xi_2, \eta_2)}{F(\xi_3, \eta_3)};\ \lambda_5 \cdot \lambda_6 = \frac{F(\xi_3, \eta_3)}{F(\xi_1, \eta_1)}$$

daher:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 = +1 \qquad 4)$$

oder auch:

$$P_1Q_1 \cdot P_1Q_2 \times P_2Q_3 \cdot P_2Q_4 \times P_3Q_5 \cdot P_3Q_6 = P_2Q_1 \cdot P_2Q_2 \times P_3Q_3 \cdot P_3P_4 \times P_1Q_5 \cdot P_1Q_6. \qquad 4)$$

Dieser merkwürdige Satz kann selbstverständlich von dem Dreieck $P_1P_2P_3$ auf ein beliebiges Polygon $P_1P_2 \ldots P_n$ übertragen werden und ebenso kann man ihn von einer Kurve zweiter Ordnung auf irgend eine algebraische Kurve ausdehnen. Er ist der sogenannte Transversalensatz.

Für eine gerade Linie ist er übrigens seit uralter Zeit bekannt und als Satz des „Ptolemäus“ in unsere Schulbücher aufgenommen.

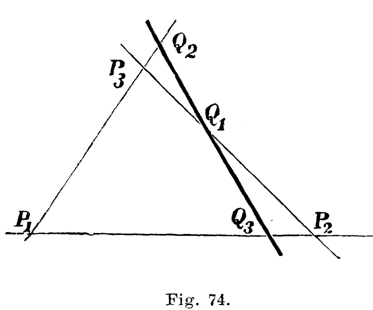


Fig. 74.

Hier haben wir (Fig. 74) nur drei Schnittpunkte Q_1, Q_2, Q_3 und nur drei Verhältnisse:

$$\lambda_1 = \frac{Q_3P_1}{Q_3P_2},\ \lambda_2 = \frac{Q_1P_2}{Q_1P_3},$$

$$\lambda_3 = \frac{Q_2P_3}{Q_2P_1},$$

[1]) Der Leser verbessere Fig. 71, wo P_2 statt P_3, P_3 statt P_2, R_1 statt R_2, R_2 statt R_1 stehen muss.

daher:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = +1 \qquad 4')$$

oder:

$$P_1Q_3 \cdot P_2Q_1 \cdot P_3Q_2 = P_1Q_2 \cdot P_3Q_1 \cdot P_2Q_3.$$

Noch sei die Bemerkung angeknüpft, dass der Transversalensatz sich häufig umkehren lässt, dass, wenn z. B. für sechs Punkte (Fig. 71) Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 die Gleichung

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 = +1$$

erfüllt ist, diese 6 Punkte auf einem Kegelschnitt liegen müssen.

Der eben erläuterte Transversalensatz kann nach dem Prinzip der Reciprocität eine duale Ergänzung erhalten, in welcher an Stelle der Schnittpunkte einer Geraden mit der Kurve die Tangenten von einem Punkt treten und die einfachen Verhältnisse zwischen drei Punkten durch die einfachen (sinus) Verhältnisse (§ 2 Seite 29) zwischen drei Strahlen treten.

Es sei wieder eine Gleichung zweiten Grades, diesmal aber in Liniencoordinaten u, v vorgelegt:

$$F(u,v) \equiv a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 + 2a_{23}u + 2a_{23}v + a_{33} = 0. \qquad 1')$$

(Diese Gleichung stellt, wie in § 11 in besonderen Fällen gezeigt und wie im nächsten § ausführlich nachgewiesen werden wird, die Tangentengleichung eines Kegelschnittes dar.)

Wir nehmen wieder ein Dreieck $P_1P_2P_3$ an (Fig. 75), legen die drei Richtungen von P_1 nach P_2, von P_2 nach P_3, von P_3 nach P_1 bei Bestimmung des Vorzeichens des Sinusverhältnisses zu Grunde, so dass z. B. das Sinusverhältniss einer durch P_1 gehenden Richtung positiv zu nehmen ist, wenn sie in dem Winkel P_1 des $\triangle\, P_1P_2P_3$ resp. in dem Scheitelwinkel läuft, negativ dagegen, wenn sie durch die Nebenwinkelräume geht.

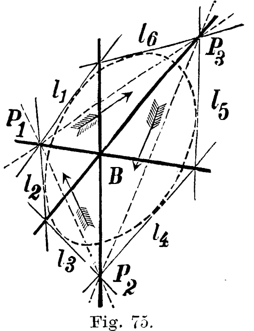


Fig. 75.

Es seien u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3 die Koordinaten der Geraden P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1. Dann werden die Koordinaten uv irgend einer durch P_1 gehenden Geraden nach 6) § 11 durch die Formeln gegeben:

$$u = \frac{u_1 - \lambda u_2}{1 - \lambda}, \; v = \frac{v_1 - \lambda v_2}{1 - \lambda}.$$

Soll sie Tangente an der Kurve sein, so folgt durch Einsetzen in 1') die quadratische Gleichung für λ:

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0,$$

wo:
$$A = F(u_2, v_2),\ C = F(u_1, v_1),$$

daher:
$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{F(u_1, v_1)}{F(u_2, v_2)}.$$

Nun ist λ noch nicht das Sinusverhältniss selbst, sondern nach Satz § 11 Seite 130 = diesem Sinusverhältniss, dividirt durch das Sinusverhältniss des durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden Strahles. Letzteres ist aber $= \frac{\sqrt{u_2^2 + v_2^2}}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}$.[1])

Bezeichnet man daher ersteres mit λ', so folgt:

$$\lambda = \lambda' \cdot \frac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2}}.$$

Daher:
$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda'_1 \cdot \lambda'_2 \cdot \frac{u_1^2 + v_1^2}{u_2^2 + v_2^2}$$

und also:
$$\lambda'_1 \cdot \lambda'_2 = \frac{F(u_1, v_1) \cdot (u_2^2 + v_2^2)}{F(u_2, v_2) \cdot (u_1^2 + v_1^2)}.$$

Ganz ebenso folgt, wenn λ'_3 und λ'_4 die Sinusverhältnisse von l_3 und l_4 zu P_2P_3 und P_2P_1 und endlich λ'_5 und λ'_6 die Verhältnisse von l_5 und l_6 zu P_3P_1 und P_1P_2 bezeichnen:

$$\lambda'_3 \cdot \lambda'_4 = \frac{F(u_2 v_2) \cdot (u_3^2 + v_3^2)}{F(u_3 v_3) \cdot (u_2^2 + v_2^2)},$$

$$\lambda'_5 \cdot \lambda'_6 = \frac{F(u_3 v_3) \cdot (u_1^2 + v_1^2)}{F(u_1 v_1) \cdot (u_3^2 + v_3^2)}.$$

Daher:
$$\lambda'_1 \cdot \lambda'_2 \cdot \lambda'_3 \cdot \lambda'_4 \cdot \lambda'_5 \cdot \lambda'_6 = +1. \qquad \textbf{4a)}$$

Diese Gleichung entspricht vollkommen der Gleichung 4). Der in ihr niedergelegte Satz ist ganz so allgemein, wie der Transversalensatz selbst. Für eine Kurve erster Klasse, d. h. für einen Punkt P (Fig. 76) reducirt sie sich auf:

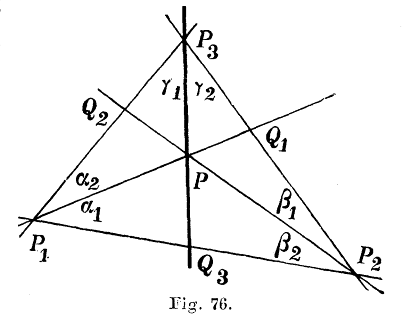


Fig. 76.

$$\lambda'_1 \cdot \lambda'_2 \cdot \lambda'_3 = +1,$$

wo:

---

[1]) Nämlich = dem Verhältniss der beiden Lote vom Anfangspunkt auf die Geraden u_1, v_1 und u_2, v_2.

λ'_1 das Sinusverhältniss von P_1P zu P_1P_2 und P_1P_3
λ'_2 „ „ „ P_2P zu P_2P_3 und P_2P_1
λ'_3 „ „ „ P_3P zu P_3P_1 und P_3P_2
bedeutet. Daher:

$$\sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_1 \cdot \sin\gamma_1 = \sin\alpha_2 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin\gamma_2.$$

Diese Beziehung wird in der Elementarmathematik meist durch eine Gleichung zwischen den einfachen Verhältnissen λ''_1, λ''_2, λ''_3 der Punkte Q_1, Q_2, Q_3 zu den Ecken P_1, P_2, P_3 ersetzt. Bezeichnet man die Winkel des $\triangle\ P_1P_2P_3$ mit α, β, γ, (also $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ etc) so ist:

$$\sin\alpha_1 : \sin\beta = P_2Q_1 : P_1Q_1$$
$$\sin\alpha_2 : \sin\gamma = Q_1P_3 : P_1Q_1, \text{ daher:}$$
$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{P_2Q_1}{Q_1P_3} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \text{ also:}$$
$$\lambda'_1 = -\lambda''_1 \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \text{ ebenso:}$$
$$\lambda'_2 = -\lambda''_2 \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$
$$\lambda'_3 = -\lambda''_3 \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Daher:

$$\lambda'_1 \cdot \lambda'_2 \cdot \lambda'_3 = (-1)^3 \cdot \lambda''_1 \cdot \lambda''_2 \cdot \lambda''_3,$$
$$\lambda''_1 \cdot \lambda''_2 \cdot \lambda''_3 = -1$$

oder:

$$Q_1P_2 \cdot Q_2P_3 \cdot Q_3P_1 = -\ Q_1P_3 \cdot Q_2P_1 \cdot Q_3 \cdot P_2.$$

Dieser Satz, der vom Vorzeichen abgesehen genau dieselbe Relation zwischen den Punkten Q_1, Q_2, Q_3 bedeutet, wie vorhin zwischen drei in einer Geraden liegenden Punkten Q_1, Q_2, Q_3 (Fig. 74), ist in der Elementarmathematik als Satz des „Ceva“ bekannt.

Für einen Kegelschnitt fällt sogar der Vorzeichenunterschied fort, da der Faktor -1 bei dem entsprechenden Uebergang von Sinusverhältnissen in Streckenverhältnisse sechsmal auftritt.

Wenn die Seiten des Dreiecks $P_1P_2P_3$ von dem Kegelschnitte berührt werden, so fallen Q_1 und Q_2, Q_3 und Q_4, Q_5 und Q_6 zusammen, also wird $\lambda_2 = \lambda_1$, $\lambda_4 = \lambda_3$, $\lambda_6 = \lambda_5$ und aus 3) wird:

$$\lambda_1^2 \cdot \lambda_3^2 \cdot \lambda_5^2 = 1,$$

also entweder: $\lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_5 = +1$
oder: $\lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_5 = -1.$

Das erstere ist ausgeschlossen, weil dann die drei Berührungspunkte nach „Ptolemaeus" in einer geraden Linie liegen müssten. (Es sei denn, dass der Kegelschnitt in eine Doppellinie ausartet, die von jeder Geraden in zwei zusammenfallenden Punkten getroffen wird.) Es bleibt daher nur

$$\lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_5 = -1.$$

Daher (nach „Ceva"): Verbindet man die Ecken eines einem Kegelschnitt umbeschriebenen Dreiecks[1] mit den Berührungspunkten der Gegenseiten, so schneiden sich die drei Transversalen in einem Punkt.

Ganz ebenso wird der reciproke Satz bewiesen, also:

Die drei Schnittpunkte der Tangenten in den Ecken eines dem Kegelschnitt einschriebenen[1] Dreiecks mit den Gegenseiten liegen in einer geraden Linie.

Diese beiden Sätze sind besondere Fälle zweier ungleich wichtigerer Theoreme, die nach ihren Entdeckern der Pascal-sche und der Brianchon'sche Lehrsatz genannt werden. (Fig. 71 und Fig. 75.)

Der Beweis des Pascal'schen Satzes ist, gestützt auf die Gleichungen 3) und 3') sehr einfach. Man führe in Fig. 71 noch die Schnittpunkte R_1, R_2, R_3 ein, betrachte in dem Dreieck $P_1P_2P_3$ der Reihe nach die drei Geraden $Q_1Q_6R_1$, $Q_3Q_2R_2$, $Q_4Q_5R_3$ als Transversalen und bezeichne dementsprechend mit μ_1, μ_2, μ_3 die Verhältnisse von R_1 zu P_2 und P_3, von R_2 zu P_3 und P_1, von R_3 zu P_1 und P_2, während λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 dieselbe Bedeutung behalten sollen wie früher. Dann folgt aus 4').

$$\lambda_1 \cdot \lambda_6 \cdot \mu_1 = +1$$
$$\lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \mu_2 = +1$$
$$\lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \mu_3 = +1,$$

---

[1]) „umbeschrieben" heisst das Dreieck auch, wenn die Berührungspunkte zum Theil oder alle auf den Verlängerungen liegen; einbeschrieben, wenn die drei Ecken auf dem Kegelschnitt liegen, gleichgiltig ob das Dreieck selbst innerhalb oder zum Theil innerhalb, zum Theil ausserhalb liegt (letzteres bei Hyperbeln möglich, wenn die Ecken sich auf beide Aeste vertheilen).

also auch:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 = +1.$$

Nun ist nach 4):

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 = +1.$$

Daher zuletzt:

$$\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 = +1,$$

d. h. R_1, R_2, R_3 liegen nach Umkehrung von 4') in einer Geraden.

Man beachte nun, dass $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_5 Q_6$ irgend ein, dem Kegelschnitt umbeschriebenes Sechseck ist, in welchem:

	$Q_1 Q_2$ und $Q_4 Q_5$	(Schnittpunkt R_3)
ebenso:	$Q_2 Q_3$ und $Q_5 Q_6$	(„ R_2)
und ebenso:	$Q_3 Q_4$ und $Q_6 Q_1$	(„ R_1)

je ein Paar Gegenseiten vorstellen. Daher:

Pascal'scher Lehrsatz: Ist ein Sechseck einem Kegelschnitt einbeschrieben, so liegen die drei Schnittpunkte der drei Gegenseitenpaare in einer Geraden. Ein solches Sechseck heisst Pascal'sches Sechseck und die genannte Gerade ist die zugehörige Pascal'sche Linie.

Umkehrung des Pascal'schen Satzes: Liegen die drei Schnittpunkte der Gegenseitenpaare eines Sechsecks in einer Geraden, so ist dasselbe irgend einem Kegelschnitt einbeschrieben.

Der Beweis stützt sich auf dieselben Gleichungen, wie der oben gegebene, nur in veränderter Folge.

Anmerkung: Der Pascal'sche Satz gilt auch dann, wenn die sechs Punkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 in solcher Reihe genommen sind, dass die Seiten überhaupt kein eigentliches Sechseck einschliessen, sondern sich zum Theil gegenseitig schneiden, wie Fig. 77 angiebt. Denn auch hier liegen die drei Punkte R_1, R_2, R_3 in einer geraden Linie. Für 6 Punkte giebt es daher, je nach dem Cyclus, in welchem sie genommen werden $\frac{6!}{2 \cdot 6} = 60$ solcher Sechsecke, und wenn ein einziges unter ihnen ein Pascal'sches ist, so sind sie es alle.

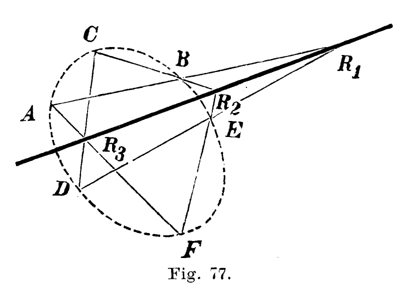


Fig. 77.

Die 60 zugehörigen Pascal'schen Linien liefern ein geometrisches Gebilde mit einer erstaunlichen Fülle merkwürdiger Eigenschaften. Steiner, Plücker, Salmon, Cayley und andere hervorragende Mathematiker haben dieses Gebiet, das eine ganze Literatur für sich beansprucht hat, erschlossen. Hier bleibt nur übrig, auf diese ausgezeichneten Untersuchungen hinzuweisen; dem Pascal'schen Satz selbst aber, auf dem sie beruhen, werden wir noch wiederholt und in anderer Beleuchtung begegnen.

Der Brianchon'sche Lehrsatz ist zwar später entdeckt worden als der Pascal'sche, ist aber nichts anderes als dessen reciprokes Abbild und kann durch Vertauschung von Punkt mit gerader Linie und von Streckenverhältniss mit Sinusverhältniss in gleicher Weise bewiesen werden. Er lautet:

Ist ein Sechseck einem Kegelschnitt umbeschrieben (Fig. 75), so schneiden sich die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken (die drei Hauptdiagonalen) in einem Punkt *(B)*. Man nennt ein solches Sechseck auch ein Brianchon'sches und den zugehörigen Punkt einen Brianchon'schen Punkt.

Dass die Umkehrung des Brianchon'schen Satzes ebenfalls richtig ist, dass es zu 6 gegebenen Tangenten je nach ihrer Reihenfolge 60 Brianchon'sche Sechsecke und daher auch 60 Brianchon'sche Punkte giebt und dass die in der Anmerkung erwähnten Eigenschaften der 60 Pascal'schen Sechsecke sich sofort reciprok hier übertragen, versteht sich nach dem Prinzip der Dualität von selbst.

Pascal hat seinen Satz, der erst später auf alle Kegelschnitte verallgemeinert wurde, am Kreise gefunden. Dieser Satz wurde lange, lange Jahrzehnte als eine Art Kuriosität betrachtet, als eine zwar interessante, aber nicht recht anwendbare Eigenschaft der Kegelschnitte. Dass er, sowie der reciproke, aber viel später entdeckte Brianchon'sche Satz [1]) als der eigentliche Kern einer grossen und hochbedeutsamen geometrischen Lehre, deren Ausbau der letzte Abschnitt dieses Buches geben soll, angesehen werden muss und eine

[1]) Ueber Brianchon, den Entdecker des nach ihm benannten Satzes, ist nichts bestimmtes bekannt. Man vermuthet, dass er identisch ist mit einem französischen General Brianchon, der unter seinen Kameraden als hervorragender Mathematiker bekannt war.

fast unerschöpfliche Fülle von Anwendungen gestattet, also Werth und Fruchtbarkeit dieser Sätze sind erst im neunzehnten Jahrhundert erkannt worden.

Aufgaben.

1) Gegeben 5 beliebige Gerade in der Ebene, l_1, l_2 .. l_5. Man betrachte drei, etwa l_1, l_2, l_3 als Seiten eines Dreiecks und l_4, sowie l_5 als Transversalen und leite so folgenden Satz ab: Sind für zwei von den fünf Geraden die Doppelverhältnisse der vier Punkte gegeben, in welchen jede von den übrigen vier geschnitten wird, so sind die Doppelverhältnisse für alle Geraden bestimmt.

2) Können diese 5 Doppelverhältnisse (wenn auf jeder Geraden ein bestimmtes von den sechs (§ 1) genommen wird) einander gleich sein? Welchen Werth, beziehungsweise welche Werthe können sie haben. (Man halte sich an den Cyclus 1, 2, 3, 4, 5).

3) Die in 2) gestellte Frage ist offenbar sofort zu bejahen, wenn die 5 Seiten eines regulären Fünfecks für die 5 Geraden $l_1 \ldots l_5$ genommen werden. Man bestätige daher aus der Theorie des regulären Fünfecks den in 2) erhaltenen Werth des Doppelverhältnisses.

---

§ 20.

Determinanten.

Von Determinanten ist schon verschiedentlich in den vorigen Paragraphen die Rede gewesen. Da diese algebraischen Gebilde durch eine ausserordentlich vielseitige Anwendbarkeit ausgezeichnet sind, so mögen hier ihre wichtigsten Eigenschaften abgeleitet werden, aber meist bei Beschränkung auf den dritten Grad, jedoch unter ausdrücklicher Bemerkung, dass diese Schranke nur gesetzt wird, um die Beweise übersichtlich zu machen und dass die Erweiterung auf Determinanten höheren Grades keine neuen Prinzipien verlangt.

Eine Ausnahme muss aber bei Darstellung des Bildungsgesetzes gemacht werden, das zuerst zu betrachten ist.

Wir haben bisher kennen gelernt:

1) Die Determinante zweiten Grades:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

2) Die Determinante dritten Grades:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1.$$

Nach Analogie könnte noch als erste Stufe die Determinante ersten Grades $|a_1|$ vorangestellt werden, die selbstverständlich nichts anderes wäre, als a_1 selbst. Es leuchtet aber ein, dass man den Determinantenbegriff auch auf höhere Grade ausdehnen kann, wenn n^2 gegebene Zahlen — die sogenannten Elemente der Determinante — zu einem Quadrat von n Horizontal- und n Vertikalreihen zusammengestellt werden, worauf das in 1) und 2) zu Tage tretende Bildungsgesetz erweitert werden muss.

Da ist zuerst klar, dass beim „Ausschreiben" der Determinante, d. h. bei ihrer Entwickelung in Glieder immer nur solche Elemente multiplicirt werden, die weder in derselben Vertikal-, noch in derselben Horizontalreihe stehen. Das erste Glied

$$a_1 \cdot b_2 \cdot c_3$$

(der Determinante dritten Grades) ist das sogenannte Diagonalglied von links oben nach rechts unten. Da nun in jedem Glied aus jeder Horizontalreihe ein Element steht (also ein a, ein b, ein c), diese drei Elemente aber aus den drei verschiedenen, durch die Indices 1, 2, 3 gekennzeichneten Vertikalreihen entnommen sind, so folgt, dass sämmtliche Glieder aus dem Diagonalglied durch alle möglichen Permutationen der Indices 1, 2, 3 entstehen. Durch Uebertragung von 3 auf n folgt also sofort:

Eine aus n^2 Elementen gebildete Determinante n^{ten} Grades hat entwickelt $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!$ Glieder, die aus dem Diagonalglied durch alle Vertauschungen der Indices entstehen.

Hiernach wächst die Zahl der Glieder mit dem Grade überaus rasch. Dem Verfasser sind aus der Astronomie Fälle von Determinanten 8. Grades bekannt, die wirklich ausgerechnet werden mussten. Hätte man da sämmtliche Glieder hinschreiben wollen, so wären es $8! = 40320$ geworden, deren Berechnung eine unvergleichlich öde und kaum durchzuführende Arbeit verursacht hätte. Eine solche Determinante wird eben nicht „entwickelt", sondern anders bewältigt.

Wie aber verhält es sich mit den Vorzeichen der einzelnen Glieder? Bei den Determinanten 2ten Grades ist die Sache sehr einfach, da ist eben das erste Glied a_1b_2 mit $+$, das andere b_1a_2 mit $-$ zu nehmen. Bei den Determinanten 3ten Grades hilft der Cyclus (1, 2, 3) über alle Schwierigkeiten hinfort. Man schreibe nämlich das Diagonalglied auf

$$+ a_1b_2c_3$$

und mache diesen Cyclus 2mal, so werden die beiden andern positiven Glieder

$$+ a_2b_3c_1 \text{ und } + a_3b_1c_2$$

erhalten, während die noch übrigen Glieder negativ ausfallen:

$$- a_1b_3c_2, \; - a_2b_1c_3, \; - a_3b_2c_1.$$

Bei den Determinanten höheren Grades erfordert die Auffindung des Vorzeichens mehr Mühe. Zunächst erhält das erste Diagonalglied stets das Zeichen $+$. Dann setzt folgende Regel ein, deren tiefere Begründung man in speciellen Lehrbüchern über Determinanten findet.[1])

Regel: Bildet man aus irgend einem Glied durch irgend eine Vertauschung zweier Indices ein neues Glied, so erhält dieses das entgegengesetzte Vorzeichen des alten.

Um daher das Vorzeichen irgend eines Gliedes zu ersehen, stelle man fest, ob es durch eine gerade oder ungerade Zahl solcher Vertauschungen aus dem Diagonalglied entspringt. Im ersteren Falle erhält es das Zeichen $+$, im andern $-$.

Gesetzt z. B. in einer Determinante 4ten Grades, deren Horizontalreihen die Buchstaben a, b, c, d, deren Vertikalreihen die Indices 1, 2, 3, 4 haben, deren Diagonalglied also:

$$+ a_1b_2c_3d_4$$

ist, soll das Vorzeichen des Gliedes:

$$a_2b_3c_4d_1$$

festgestellt werden. Hierzu vertausche man im Diagonalglied 1 mit 2. Es folgt:

$$a_2b_1c_3d_4.$$

Nun vertausche man 1 mit 3. Es folgt:

$$a_2b_3c_1d_4$$

und endlich vertausche man 1 mit 4, so entsteht:

$$a_2b_3c_4d_1,$$

---

[1]) Z. B. in Baltzer, Determinanten.

d. i. das fragliche Glied. Da drei Vertauschungen nöthig waren, so erhält es das Zeichen —, also:

$$- a_2 b_3 c_4 d_1.$$

Man hat aus dieser Regel noch andere abgeleitet, die für die Anwendung bequemer sind, wir wollen aber von ihnen absehen, da bei den Determinanten dritten Grades, die später vornehmlich gebraucht werden, die Vorzeichenbestimmung so einfach durch den Cyclus (1, 2, 3) geregelt wird und Determinanten höheren Grades, wie schon erwähnt, überhaupt nicht in Glieder entwickelt werden.

Anstatt die Glieder einer Determinante aus dem ersten durch Permutation der Indices zu bilden, kann man auch die Buchstaben permutiren. Dass man dabei dieselben Glieder erhält, ist augenscheinlich; dass aber auch die Vorzeichen bei beiden Methoden übereinstimmen, lässt sich für Determinanten dritten Grades leicht durch Probe feststellen, während die Richtigkeit dieser Thatsache auch für Determinanten höheren Grades streng bewiesen werden kann. Daher der Satz:

Man kann in einer Determinante Horizontal- und Vertikalreihen miteinander vertauschen.

Es ist:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}$$

Sätze also, die sich auf Horizontalreihen beziehen, sind auch ohne Weiteres für Vertikalreihen richtig und umgekehrt.

Fundamentalsatz der Determinantentheorie.

Eine Determinante wechselt ihr Vorzeichen, wenn in ihr irgend zwei Horizontalreihen oder irgend zwei Vertikalreihen mit einander vertauscht werden. Sie „alternirt“.

Es ist z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_3, & b_3, & c_3 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_1, & b_1, & c_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

Denn diese Vertauschung von Reihen kommt darauf hinaus, dass die entsprechenden Indices (hier 1 und 3) sich vertauschen, ohne dass das Vorzeichen gewechselt wird. Da aber diese Vertauschung nach der Vorzeichenregel innerhalb jeder der beiden Determinanten einen Vorzeichenwechsel mit sich

führt, so erhalten alle Glieder, die in der ersten Determinante das Zeichen + hatten, nachher das Zeichen — und umgekehrt, womit der Satz bewiesen ist.

Wenn mehr als 2 Reihen ihre Plätze verändert haben sollten, so ist nachzusehen, auf wie viele einfache Vertauschungen von je zwei Reihen dies zurückkommt. Ist die Zahl derselben ungerade, so hat die Determinante ihr Vorzeichen gewechselt; ist sie gerade, so nicht. Uebrigens ersieht man aus diesem Satz, dass man jedes Glied der Determinante zum Diagonalglied machen kann, d. h. dass das Diagonalglied vor den andern Gliedern schlechterdings nichts voraus hat.

Zusatz: Eine Determinante wird identisch $= 0$, wenn in ihr irgend zwei Horizontal- oder Vertikalreihen übereinstimmen.

Denn durch Vertauschung dieser beiden Reihen soll die Determinante Δ ihr Vorzeichen wechseln; andererseits bleibt sie aber bei dieser Vertauschung ganz unverändert, also ist

$$\Delta = -\Delta,\ 2\Delta = 0,\ \Delta = 0, \text{ q. e. d.}$$

(Der Sachverhalt ist der, dass bei der Entwickelung der Determinante je zwei Glieder sich gegenseitig aufheben.)

Entwickelung einer Determinante nach den Elementen einer Reihe. Unterdeterminanten. Gegeben sei:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Da alle Glieder ein a als Faktor haben, so kann man sie sondern in solche mit dem Faktor a_1, in solche mit dem Faktor a_2, und in solche mit dem Faktor a_3. So wird:

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

Die Faktoren von a_1, a_2, a_3, nämlich

$$b_2c_3 - b_3c_2,\ b_3c_1 - b_1c_3,\ b_1c_2 - b_2c_1$$

sind auch Determinanten und zwar zweiten Grades, denn es ist z. B.

$$b_2c_3 - b_3c_2 = \begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

u. s. w. Diese Determinante ist der Faktor von a_1 und wird die zu a_1 gehörende Unterdeterminante genannt. Entsprechend

hat jedes Element seine Unterdeterminante und so entstehen hier neun Unterdeterminanten, die wir der Reihe nach mit

$$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$$

bezeichnen wollen, so dass A_1 Unterdeterminante zu a_1, A_2 zu a_2 etc. sein soll.

Das Bildungsgesetz dieser Unterdeterminanten, welche auch Minoren der gegebenen Determinante heissen, ist offenbar so, dass man die Horizontal- und die Vertikalreihe, in der das betreffende Element steht, fortlässt und die übrigen Reihen zu einer neuen Determinante zusammenschiebt, welche vom Vorzeichen abgesehen, die zu diesem Element zugehörige Unterdeterminante ist. Das Vorzeichen aber ergiebt sich, indem man zählt, in welcher Horizontal- und in welcher Vertikalreihe das zugehörige Element (vom ersten an gerechnet) steht. Ist beidemal die Stellenzahl gerade oder beidemal ungerade, so ist es $+$, sonst $-$.

Auf diese Weise entstehen die neun Unterdeterminanten von Δ, wie folgt:

$$A_1 = + \begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} = b_2c_3 - b_3c_2,$$

$$A_2 = - \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} = b_3c_1 - b_1c_3,$$

$$A_3 = + \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix} = b_1c_2 - b_2c_1,$$

$$B_1 = - \begin{vmatrix} a_2, & c_2 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} = a_3c_2 - a_2c_3,$$

$$B_2 = + \begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} = a_1c_3 - a_3c_1,$$

$$B_3 = - \begin{vmatrix} a_1, & c_1 \\ a_2, & c_2 \end{vmatrix} = a_2c_1 - a_1c_2,$$

$$C_1 = + \begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - a_3b_2,$$

$$C_2 = - \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix} = a_3b_1 - a_1b_3,$$

$$C_3 = + \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Es empfiehlt sich, diese Unterdeterminanten auch zu einer Determinante

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}$$

zusammenzustellen.

Durch Entwickelung der Determinante Δ nach sämmtlichen Reihen entstehen folgende sechs Darstellungen:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1, \\ &= b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2, \\ &= c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3 = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3. \end{aligned}$$

Erklärung: Sind zwei Reihen, wie

$$\begin{matrix} a_1, a_2, a_3 \\ A_1, A_2, A_3 \end{matrix}$$

gegeben, so versteht man unter Componiren derselben die Bildung des Ausdruckes:

$$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3.$$

Daher: Man erhält eine Determinante durch Componiren einer ihrer Reihen mit der entsprechenden Reihe der Unterdeterminante.

Man bemerke, dass A_1, A_2, A_3 von a_1, a_2, a_3 ganz unabhängig sind. In der Identität:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$$

darf man also für a_1, a_2, a_3 setzen, was man will, ohne dass A_1, A_2, A_3 sich ändern.

Es werde z. B. statt a_1, a_2, a_3 gesetzt: b_1, b_2, b_3, so folgt:

$$\begin{vmatrix} b_1, & b_1, & c_1 \\ b_2, & b_2, & c_2 \\ b_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3.$$

Die links stehende Determinante verschwindet aber wegen der Identität zweier Reihen, folglich:

$$0 = b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3, \text{ d. h.}$$

durch Componiren einer Reihe einer Determinante mit einer nicht entsprechenden Reihe ihrer Unterdeterminanten (es müssen aber beide Horizontal- oder beide Vertikalreihen sein) erhält man stets Null.

Der vorigen Gleichung kann man noch 11 Analogien zur Seite stellen, z. B.:

$$0 = c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3, \text{ oder}$$
$$0 = a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2.$$

Der eben bewiesene Satz gestattet sofort eine ausgezeichnete Anwendung auf die Lösung von n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten. Es sei z. B. das System vorgelegt:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3.$$

Man bilde aus den Coefficienten der Unbekannten die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

und berechne, wie vorhin angegeben, die neun Unterdeterminanten A_1, B_1, C_1 etc. Um nun x zu finden, multiplicire man die Gleichungen der Reihe nach mit A_1, A_2, A_3 und addire. Es folgt

$$(a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3)\, x + (b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3)\, y + (c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3)\, z = d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3$$

also, da die Coefficienten von y und z verschwinden:

$$x = \frac{d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3}{a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3}$$

oder in Determinantenform:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1, & b_1, & c_1 \\ d_2, & b_2, & c_2 \\ d_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Analoge Ausdrücke geben y und z. Daher das Resultat, das sofort allgemein auf n Gleichungen mit n Unbekannten erweitert werden kann:

Die Ausdrücke für x, y und z sind Brüche mit demselben Nenner. Letzterer ist die Determinante aus den Coefficienten der Unbekannten. Die Zähler entstehen, indem in dieser Determinante die Coefficienten derjenigen Unbekannten, welche berechnet werden soll, durch die rechtsstehenden Constanten der Gleichungen ersetzt werden.

Bemerkung: Diese Lösung von n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten verdient vor jeder anderen (wenigstens in den allermeisten Fällen) den Vorzug. Denn erstens sind die Formeln nicht allein theoretisch vollendet einfach und durchsichtig, sondern auch für die praktische Rechnung (namentlich für $n = 3$) besser, als die sonst übliche Elimination erst einer Unbekannten, dann der zweiten u. s. w., bis nur noch eine Unbekannte übrig bleibt.[1]) Bei einiger Umsicht macht die Berechnung von A_1, A_2, A_3 u. s. w. gar keine Schwierigkeit und die Rechnung selbst giebt die nöthige Controle durch die Bedingung, dass nach der Multiplikation mit A_1, A_2, A_3 und Addition die Unbekannten y und z herausfallen müssen u. s. w.

Die Entwickelung nach Unterdeterminanten zeigt, dass eine Determinante verschwindet, sobald sämmtliche Elemente einer Reihe $= 0$ sind. Sind sie aber $= 0$, bis auf ein einziges Element dieser Reihe, so ist die Determinante $=$ dem Produkt aus diesem Element mit der zugehörigen Unterdeterminante.

Dieser Satz erlaubt es, den Grad einer Determinante zu erhöhen. So ist z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & a, & b \\ 0, & a_1, & b_1 \\ 0, & a_2, & b_2 \end{vmatrix},$$

wo für a und b irgend welche Zahlen gesetzt werden können. Allerdings wird man in der Regel den Grad lieber erniedrigen, und hierzu lässt sich auch Rath schaffen, wie wir bald sehen werden.

Aus der Entwickelung in Unterdeterminanten folgen weiter die beiden Formeln:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1, & b_1, & c_1 \\ \lambda a_2, & b_2, & c_2 \\ \lambda a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

(Haben alle Elemente einer Reihe denselben Faktor, so kann derselbe vor die Determinante gesetzt werden.)

$$\begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1, & b_1, & c_1 \\ a_2 + \alpha_2, & b_2, & c_2 \\ a_3 + \alpha_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1, & b_1, & c_1 \\ \alpha_2, & b_2, & c_2 \\ \alpha_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

[1]) Bei dieser allmäligen Elimination treten überflüssige Faktoren auf, die für $n > 3$ die Rechnung ungemein beschweren.

(Ist jedes Element einer Reihe eine Summe von zwei Summanden, so lässt sich die Determinante in zwei zerlegen.)

Durch Anwendung beider Formeln erhält man weiter:

$$\begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1, & b_1, & c_1 \\ a_2 + \lambda b_2, & b_2, & c_2 \\ a_3 + \lambda b_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} b_1, & b_1, & c_1 \\ b_2, & b_2, & c_2 \\ b_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

Daher der höchst wichtige Satz:

Der Werth einer Determinante ändert sich nicht, wenn zu den Elementen einer Reihe die entsprechenden Elemente einer andern Reihe addirt werden, nachdem letztere mit einem beliebigen Faktoren multiplicirt worden sind.

Die grosse Bedeutung dieses Satzes liegt darin, dass man nun die Elemente selbst verändern kann, während wir vorher zwar gesehen hatten, dass sie allerdings durch Vertauschung von Reihen ihre Plätze ändern dürfen, wobei aber die Elemente selbst dieselben blieben. Namentlich aber ermöglicht dieser Satz die Erniedrigung des Grades einer Determinante und damit auch eine wirkliche Berechnung von Determinanten höheren Grades. Um z. B. die Determinante dritten Grades

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

in eine solche zweiten Grades umzuformen, multiplicire man die erste Horizontalreihe erst mit $-\frac{c_2}{c_1}$, dann mit $-\frac{c_3}{c_1}$ und addire sie dann zur zweiten und dritten Horizontalreihe.

Es folgt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2 - \frac{c_2}{c_1} a_1, & b_2 - \frac{c_2}{c_1} b_1, & 0 \\ a_3 - \frac{c_3}{c_1} a_1, & b_3 - \frac{c_3}{c_1} b_1, & 0 \end{vmatrix}$$

$$= c_1 \begin{vmatrix} a_2 - \frac{c_2}{c_1} a_1, & b_2 - \frac{c_2}{c_1} b_1 \\ a_3 - \frac{c_3}{c_1} a_1, & b_3 - \frac{c_3}{c_1} b_1 \end{vmatrix}$$

Ueberhaupt macht dieser Satz die Determinanten bei gewandter Handhabung zu einem der wichtigsten Hilfsmittel bei tieferen analytischen Untersuchungen. Algebraische Formen von schwer übersichtlicher Ausdehnung werden häufig mit einem Male gefügig, wenn man sie in das Gewand der Determinante kleidet; ihr Bildungsgesetz wird klar und durchsichtig und ausserdem ist man mittelst unseres Satzes im Stande, ihre Gestalt auf die mannigfaltigste Art zu ändern.

Dieser Satz ist indessen nur ein besonderer Fall des sogenannten **Multiplikationstheorems** der Determinanten, welches die Elemente ihrer Theorie zu einem guten Abschluss bringt. Dieses Theorem besagt, dass man das Produkt zweier Determinanten wieder in Determinantenform darstellen kann. Freilich setzt es beide Determinanten als von gleichem Grade voraus, was aber eigentlich keine Beschränkung seiner Anwendungsfähigkeit ist, da der Grad sich sofort erhöhen und gleichfalls, wenn auch etwas umständlicher, erniedrigen lässt.

Gegeben seien die beiden Determinanten:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}, \quad \varDelta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Man komponire sämmtliche Horizontalreihen oder sämmtliche Vertikalreihen von $\varDelta$ nach und nach mit sämmtlichen Horizontal-, beziehungsweise Vertikalreihen von $\varDelta_1$ und stelle die so gebildeten n^2 Ausdrücke zu einer neuen Determinante zusammen, wie folgt:

$$D = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1, & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2, & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1, & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2, & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_3\gamma_1, & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2, & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Dann soll sein:

$$D = \varDelta \cdot \varDelta_1.$$

Um die Richtigkeit dieses Theorems zu erweisen, löse man jede Vertikalreihe von D in 3 Theilreihen auf, so dass neun solche Theilreihen gebildet werden, die wie folgt bezeichnet sind:

$$\begin{array}{ccccccccc} & \mathrm{I} & & & \mathrm{II} & & & \mathrm{III} & \\ \mathrm{I}_1 & \mathrm{I}_2 & \mathrm{I}_3 & \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \mathrm{II}_3 & \mathrm{III}_1 & \mathrm{III}_2 & \mathrm{III}_3 \\ a_1\alpha_1 & b_1\beta_1 & c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2 & b_1\beta_2 & c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3 & b_1\beta_3 & c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 & b_2\beta_1 & c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2 & b_2\beta_2 & c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3 & b_2\beta_3 & c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 & b_3\beta_1 & c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2 & b_3\beta_2 & c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3 & b_3\beta_3 & c_3\gamma_3. \end{array}$$

So wird D in $3 \times 3 \times 3 = 27$ Theildeterminanten zerlegt, weil jede Theilreihe von I mit jeder Theilreihe von II und mit jeder Theilreihe von III zusammenzunehmen ist. Die erste dieser Theildeterminanten ist:

$$\begin{array}{c} \mathrm{I}_1 \quad \mathrm{II}_1 \quad \mathrm{III}_1 \\ \begin{vmatrix} a_1\alpha_1, & a_1\alpha_2, & a_1\alpha_3 \\ a_2\alpha_1, & a_2\alpha_2, & a_2\alpha_3 \\ a_3\alpha_1, & a_3\alpha_2, & a_3\alpha_3 \end{vmatrix} \end{array} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1, & a_1, & a_1 \\ a_2, & a_2, & a_2 \\ a_3, & a_3, & a_3 \end{vmatrix} = 0,$$

und ebenso verschwinden alle diejenigen, bei welchen irgend zwei Theilreihen denselben Index haben. Von obigen 27 Theildeterminanten bleiben daher nur folgende sechs übrig:

$$\mathrm{I}_1, \mathrm{II}_2, \mathrm{III}_3;\ \mathrm{I}_1, \mathrm{II}_3, \mathrm{III}_2;\ \mathrm{I}_2, \mathrm{II}_1, \mathrm{III}_3;\ \mathrm{I}_2, \mathrm{II}_3, \mathrm{III}_1;$$
$$\mathrm{I}_3, \mathrm{II}_1, \mathrm{III}_2;\ \mathrm{I}_3, \mathrm{II}_2, \mathrm{III}_1.$$

Die erste ist:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1, & b_1\beta_2, & c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1, & b_2\beta_2, & c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1, & b_3\beta_2, & c_3\gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2\gamma_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2\gamma_3 \cdot \Delta,$$

die zweite ist:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1, & c_1\gamma_2, & b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1, & c_2\gamma_2, & b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1, & c_3\gamma_2, & b_3\beta_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_3\gamma_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1, & c_1, & b_1 \\ a_2, & c_2, & b_2 \\ a_3, & c_3, & b_3 \end{vmatrix} = -\alpha_1\beta_3\gamma_2 \cdot \Delta$$

u. s. w.; daher endlich:

$$D = \Delta \cdot (\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 \ldots),$$

d. h. $D = \Delta \cdot \Delta_1$. q. e. d.

Einige Anwendungen des Multiplikationstheorems:

1. Wenn Δ und Δ_1 identisch sind, also $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = a_2$ u. s. w., so folgt:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2, & a_2a_1 + b_2b_1 + c_2c_1, & a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2, & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2, & a_3a_2 + b_3b_2 + c_3c_2 \\ a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3, & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3, & a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \end{vmatrix}.$$

Hier stimmen die Horizontalreihen mit den Vertikalreihen überein, die Determinante ist, wie man sagt, symmetrisch.

2. Wenn Δ_1 die aus den Unterdeterminanten von Δ gebildete Determinante ist, also nach der vorher gebrauchten

Bezeichnung $a_1 = A_1$, $a_2 = A_2$ u. s. w., so giebt das Theorem bei Benutzung der Beziehung zwischen Elementen und Unterdeterminanten:

$$\Delta \cdot \Delta_1 = \begin{vmatrix} \Delta, & 0, & 0 \\ 0, & \Delta, & 0 \\ 0, & 0, & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^3.$$

Daher:

$$\Delta_1 = \Delta^2 \text{ (allgemein } \Delta_1 = \Delta^{n-1}),$$

d. h. die Determinante der Unterdeterminanten ist = der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz der ursprünglichen Determinante.

3. Es sei $\Delta_1 = \begin{vmatrix} B_2, & C_2 \\ B_3, & C_2 \end{vmatrix}$, d. h. eine „Unterdeterminante der Unterdeterminanten".

Man schreibe zunächst:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}$$

und wende nun das Multiplicationstheorem an. Es folgt:

$$\Delta \cdot \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ 0, & \Delta, & 0 \\ 0, & 0, & \Delta \end{vmatrix} = a_1 \cdot \Delta^2.$$

Daher:

$$\begin{vmatrix} B_2, & C_2 \\ B_3, & C_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \Delta.$$

Mit anderen Worten: Bildet man die Unterdeterminanten der Unterdeterminanten, so erhält man die Elemente wieder zurück, allerdings sämmtlich multiplicirt mit Δ. (Ist die vorgelegte Determinante vom Grade n, so multiplicirt mit Δ^{n-2}.) Die Beziehungen zwischen Elementen und Unterdeterminanten sind daher, von diesem Faktor Δ abgesehen, durchaus umkehrbar oder reciprok.

Ist aber $\Delta = 0$, so wird diese Reciprocität eben des Faktors Δ wegen zu nichte, weil sämmtliche Unterdeterminanten der Unterdeterminanten = 0 werden. Die Reihen der Determinante:

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}$$

stehen in Proportion, es ist:

$$A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2 = A_3 : B_3 : C_3$$

oder auch:

$$A_1 : A_2 : A_3 = B_1 : B_2 : B_3 = C_1 : C_2 : C_3.$$

Bisher sind die Horizontalreihen durch Indices 1, 2, 3, die Vertikalreihen durch Buchstaben a, b, c auseinander gehalten worden. Zuweilen zieht man aber beidemale Indices vor und schreibt dann die Determinante folgendermassen:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Dann hat jedes Element die Form:

$$a_{\lambda\mu}$$

und der erste Index bezeichnet die Horizontal-, der zweite die Vertikalreihe, in der es steht. Ist dann noch für alle Werthe von λ und μ:

$$a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda},$$

so wird die Determinante symmetrisch:

Eine solche symmetrische Determinante ist z. B. die „grosse Diskriminante“ D des § 17 und die „kleine“, dort mit Δ bezeichnet ist nichts anderes als die zu a_{33} gehörende Unterdeterminante der grossen.

Aufgaben:

1) Die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & x_1, & x_1^2 \\ 1, & x_2, & x_2^2 \\ 1, & x_3, & x_3^2 \end{vmatrix}$$

ist zu entwickeln und nachher in Faktoren zu zerlegen. Erweiterung auf analoge Determinanten höheren Grades.

2) Man zeige, dass eine „schiefe“ Determinante dritten Grades, d. h. eine Determinante von der Form:

$$\begin{vmatrix} 0, & a, & b \\ -a, & 0, & c \\ -b, & -c, & 0 \end{vmatrix}$$

identisch verschwindet. Erweiterung auf alle schiefen Determinanten ungeraden Grades.

3) Zu beweisen, dass die schiefe Determinante vierten Grades:

$$\begin{vmatrix} 0, & a, & b, & c \\ -a, & 0, & d, & e \\ -b, & -d, & 0, & b \\ -c, & -e, & -b, & 0 \end{vmatrix}$$

ein reines Quadrat ist. Erweiterung auf alle schiefen Determinanten geraden Grades.

---

§ 21.

Erweiterung des Koordinatenbegriffes. Homogene Koordinaten und Dreieckskoordinaten.

Es ist zuweilen von Vortheil, wenn statt der beiden rechtwinkligen Koordinaten x und y drei Grössen X, Y, Z eingeführt werden, indem man setzt:

$$x = \frac{X}{Z}, \; y = \frac{Y}{Z} \qquad \textbf{1)}$$

wobei der Nenner beliebig gelassen wird. X, Y, Z heissen dann homogene Koordinaten und aus der Erklärung durch die Gleichungen 1) geht auf der Stelle hervor, dass es nur auf ihre Verhältnisse ankommt und derselbe Punkt erhalten wird, wenn an Stelle von X, Y, Z gesetzt werden: $\lambda \cdot X$, $\lambda \cdot Y$, $\lambda \cdot Z$, wo λ ein beliebiger Faktor ist. Sonst können X, Y, Z irgend welche Werthe haben, nur dürfen sie nicht alle drei $= 0$ sein, weil dann die rechtwinkligen Koordinaten $x = \frac{X}{Z}$ $y = \frac{Y}{Z}$ die Form $\frac{0}{0}$ erhalten, also unbestimmt werden.

Die eigentliche Veranlassung zur Einführung homogener Koordinaten ist der Wunsch gewesen, selbst für unendlich ferne Punkte unendlich grosse Koordinaten zu vermeiden. Man setze nämlich für einen solchen Punkt nur $Z = 0$, worauf nach 1) sofort x und y unendlich werden. Es bleiben dann noch X und Y übrig oder vielmehr ihr Verhältniss $\frac{Y}{X} = \frac{y}{x}$, d. h. die Richtung, in welcher der unendlich ferne Punkt liegt. In jedem andern Falle kann man übrigens $Z = 1$ setzen, wenn man von homogenen Koordinaten wieder zu rechtwinkligen übergehen will, da dann $x = X$, $y = Y$.

Die Gleichung der geraden Linie

$$ax + by + c = 0$$

geht nach Einführung homogener Koordinaten und Multiplikation mit Z über in

$$aX + bY + cZ = 0.$$

Die Gleichung ist also „homogen“ geworden, alle ihre Glieder sind vom ersten Grade, das constante Glied ist fort. Stellt man zwei solche Gleichungen zusammen:

$$a_1X + b_1Y + c_1Z = 0,$$
$$a_2X + b_2Y + c_2Z = 0,$$

so kann man zwar aus ihnen nicht X, Y, Z ermitteln, wohl aber ihre Verhältnisse. Man findet leicht:

$$X : Y : Z = b_1c_2 - c_1b_2 : c_1a_2 - a_1c_2 : a_1b_2 - b_1a_2.$$

Da es aber andererseits doch nur auf diese Verhältnisse ankommt, so mag auch sofort gesetzt werden:

$$X = b_1c_2 - c_1b_2,\; Y = c_1a_2 - a_1c_2,\; Z = a_1b_2 - b_1a_2,$$

während die rechtwinkligen Koordinaten wieder werden:

$$x = \frac{X}{Z} = \frac{b_1c_2 - c_1b_2}{a_1b_2 - b_1a_2},$$
$$y = \frac{Y}{Z} = \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}.$$

(Vergleiche § 9 Seite 113.)

Wie hier, so können stets nach Einführung homogener Koordinaten Nenner vermieden werden und das ist ein Hauptvortheil, den sie bieten.

Liegt eine Gleichung zweiten Grades vor:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

so verwandelt sie sich nach Substitution von 1) und Multiplication mit Z^2 in:

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}XZ + 2a_{23}YZ + a_{33}Z^2 = 0.$$

In ganz gleicher Weise kann man bei allen Gleichungen verfahren und dadurch eine Art Symmetrie, die Homogenität, den gleichen Grad aller Glieder herstellen. Freilich sind es dann drei Koordinaten statt zwei, mit denen man es nun zu thun hat, aber die Coefficienten bleiben doch genau dieselben, und da man nur nöthig hat, $Z = 1$ zu setzen, um wieder zu rechtwinkligen Koordinaten zurückzukehren, so wird man in Anbetracht der grossen Vortheile, die bei vielen Unter-

suchungen die Homogenität bietet, die kleine Mühe des Aufschreibens von Z nicht scheuen.

Setzt man in der homogen gemachten Gleichung $Z = 0$, so bleibt nur eine homogene Gleichung zwischen X und Y, welche für die unendlich fernen Punkte (für solche ist $Z = 0$) der Kurve das Verhältniss $\frac{Y}{X} = \frac{y}{x}$ bestimmt, womit noch einmal die Thatsache festgestellt ist, dass für die Richtung, in welcher eine Kurve sich unendlich weit entfernt (die Richtungen ihrer Asymptoten) nur die Glieder höchsten Grades ihrer Gleichung (wenn dieselbe noch nicht homogen gemacht ist) massgebend sind.

Ausser den Punktkoordinaten sind (in § 11) die Koordinaten u und v einer geraden Linie durch die Gleichungen:

$$u = -\frac{1}{p}, \quad v = -\frac{1}{q}$$

eingeführt worden, und das Prinzip der Dualität erfordert, dass auch diese durch die Substitution:

$$u = \frac{U}{W}, \; v = \frac{V}{W}$$

homogen gemacht werden. Hier ist der Vortheil der Homogenität wohl noch augenscheinlicher, denn um auszudrücken, dass die Gerade durch den Anfangspunkt gehen soll, hat man nur $W = 0$ zu setzen und U und V beliebig zu lassen, während u und v selbst unendlich werden, so dass an ihrer Stelle für diesen Fall $\frac{u}{v} = \frac{U}{V} = \frac{q}{p} = -m$ eingeführt werden müsste.

Die Gleichung:

$$ux + vy + 1 = 0,$$

welche die Bedingung ist, dass der Punkt (x, y) auf der Geraden (u, v) liegt, verwandelt sich jetzt in:

$$UX + VY + WZ = 0$$

und zeigt nunmehr vollendete Symmetrie, so dass man sagen kann:

Ist die Gleichung einer geraden Linie in Punktkoordinaten X, Y, Z gegeben, so sind die Coefficienten dieser Gleichung nichts anderes als die (homogenen) Linienkoordinaten U, V, W dieser Linie. Ist aber die Gleichung eines Punktes in Linienkoordinaten U, V, W gegeben, so sind die Coefficienten identisch mit den (homogenen) Punktkoordinaten dieses Punktes.

Genau besehen beruht die Einführung der homogenen Koordinaten, geometrisch aufgefasst, darauf, dass zu den beiden Koordinatenachsen noch die unendlich ferne Gerade als dritte Koordinatenachse hinzugefügt wird. Denn wie für jeden Punkt der Abscissenachse $Y=0$, der Ordinatenachse $X=0$, so ist jetzt für jeden Punkt der unendlich fernen Geraden $Z=0$. Oder auch, wie der Anfangspunkt die Gleichung hat $W=0$, so ist für den Schnittpunkt der Abscissenachse mit der unendlich fernen Geraden die Gleichung $U=0$, und für den Schnittpunkt der Ordinatenachse mit der unendlich fernen Geraden die Gleichung $V=0$ massgebend.

Von diesem Standpunkt aus erscheint die letzte Verallgemeinerung des Koordinatensystems, die wir jetzt vorhaben, als durchaus natürlich. Muss man als dritte Achse durchaus die unendlich ferne Gerade nehmen oder kann es nicht irgend eine Gerade sein? Müssen weiter die beiden andern Koordinatenachsen senkrecht aufeinander stehen? Mit anderen Worten: Kann man nicht irgend ein Dreieck als Grundlage einer Koordinatenbestimmung benutzen, indem seine Seiten (unbegrenzt verlängert gedacht) als Koordinatenachsen und seine Ecken als Koordinatenecken eingeführt werden?

Diese Fragen haben zur Theorie der „Dreieckskoordinaten" den Weg gebahnt. Man gehe zunächst von irgend einem rechtwinkligen Koordinatensystem aus, bezeichne aber, um die Buchstaben x und y noch frei zu haben, die rechtwinkligen Koordinaten mit ξ und η und nehme nun irgend drei lineare Ausdrücke:

$$\begin{aligned} x &= a_1\xi + b_1\eta + c_1 \\ y &= a_2\xi + b_2\eta + c_2 \\ z &= a_3\xi + b_3\eta + c_3. \end{aligned} \qquad 3)$$

Dann stellen $x=0$, $y=0$, $z=0$ die Gleichungen dreier Geraden vor und die Bedingung, dass letztere sich nicht in einem Punkte schneiden, sondern ein Dreieck bilden, ist nach § 10, dass die Determinante der Coefficienten:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} \qquad 4)$$

von 0 verschieden ist. Diese Bedingung bildet die einzige,

dafür aber unumgänglich nothwendige Voraussetzung. Wenn nun x, y, z an Stelle von ξ und η als Koordinaten eingeführt werden, so ist sofort ein Dreieckskoordinatensystem geschaffen, da nun $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ die Gleichungen der Seiten eines beliebigen Dreiecks sind.

Auch die geometrische Bedeutung der Dreieckskoordinaten liegt auf der Hand. Es sei P (Fig. 78) der durch x, y, z, beziehungsweise durch ξ, η, dargestellte Punkt und $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, (in der Figur nicht gezeichnet), seien die Lote auf die drei Seiten $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Dann ist nach 3) § 9:

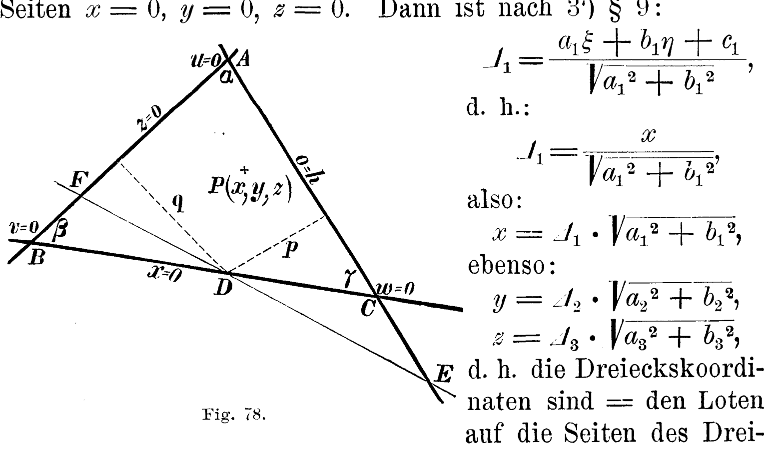


Fig. 78.

$$\Delta_1 = \frac{a_1\xi + b_1\eta + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}},$$

d. h.:

$$\Delta_1 = \frac{x}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}},$$

also:

$$x = \Delta_1 \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2},$$

ebenso:

$$y = \Delta_2 \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2},$$

$$z = \Delta_3 \cdot \sqrt{a_3^2 + b_3^2},$$

d. h. die Dreieckskoordinaten sind = den Loten auf die Seiten des Dreiecks, nachdem jedes Lot mit einem constanten Faktor multiplicirt worden.

Man kann diese Faktoren = 1 machen, indem die drei linearen Ausdrücke 3) in der Hesse'schen Form genommen werden, dann sind x, y, z diese Lote selbst. Indessen ist diese Beschränkung durchaus nicht nothwendig und im Interesse der Allgemeinheit nicht einmal geboten. Es genügt, wenn x = dem Produkt aus dem Lot auf die eine Grundseite und einen constanten, sonst aber beliebigen Faktor gesetzt und ein gleiches für y und z angenommen wird.

Die drei Koordinaten x, y, z sind nicht von einander unabhängig, denn multiplicirt man die Gleichungen 3) der Reihe nach mit den zu c_1, c_2, c_3 gehörenden Unterdeterminanten C_1, C_2, C_3 der Determinante Δ, so folgt:

$$xC_1 + yC_2 + zC_3 = \Delta. \qquad \textbf{5)}$$

Man könnte daher z durch x und y ausdrücken und so

aus dem Grunddreieck durch Fortlassen einer Seite ein Koordinatensystem ableiten, das wesentlich auf ein schiefwinkliges hinauskommt, statt dessen zieht man aber vor, auch die Dreieckskoordinaten „homogen“ zu machen, indem man zunächst statt ξ und η wie vorhin die Ausdrücke

$$\xi = \frac{X}{Z}, \ \eta = \frac{Y}{Z}$$

einsetzt, dann in 3) rechts mit Z multiplicirt und nun die drei linearen homogenen Funktionen durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= a_1 X + b_1 Y + c_1 Z \\ y &= a_2 X + b_2 Y + c_2 Z \\ z &= a_3 X + b_3 Y + c_3 Z \end{aligned} \qquad \textbf{3a)}$$

als homogene Dreieckskoordinaten einführt. Da in 3a) durch X, Y, Z und $\lambda X, \lambda Y, \lambda Z$ derselbe Punkt dargestellt wird, so auch durch x, y, z und $\lambda x, \lambda y, \lambda z$ und die Gleichung 5) fällt nun selbstverständlich fort.

Löst man nach der Methode des § 20 die Gleichungen 3a) nach X, Y, Z auf, so folgt, wenn die Unterdeterminanten von Δ wie dort mit A_1, A_2 etc. bezeichnet werde:

$$\begin{aligned} \Delta \cdot X &= A_1 x + A_2 y + A_3 z \\ \Delta \cdot Y &= B_1 x + B_2 y + B_3 z \\ \Delta \cdot Z &= C_1 x + C_2 y + C_3 z \end{aligned} \qquad \textbf{3b)}$$

wodurch die Rückkehr von Dreieckskoordinaten zu den homogenen rechtwinkligen Koordinaten hergestellt wird. Durch Division folgen dann die eigentlichen rechtwinkligen Koordinaten:

$$\xi = \frac{X}{Z} = \frac{A_1 x + A_2 y + A_3 z}{C_1 x + C_2 y + C_3 z}$$

$$\eta = \frac{Y}{Z} = \frac{B_1 x + B_2 y + B_3 z}{C_1 x + C_2 y + C_3 z}.$$

Was sind nun wohl Dreieckskoordinaten einer geraden Linie, oder vielmehr, wie hat man diese zweckmässig zu definiren? Es seien U, V, W die homogenen Linienkoordinaten in dem zu Anfang benutzten rechtwinkligen Koordinatensystem, also:

$$UX + VY + WZ = 0$$

die Gleichung dieser Geraden.

Es seien ferner u, v, w die noch zu definirenden Dreieckskoordinaten derselben Geraden. Dann ist die zu Grunde liegende Voraussetzung die, dass der Ausdruck

$$UX + VY + WZ$$

sich transformire in:

$$ux + vy + wz,$$

so dass identisch:

$$UX + VY + WZ \equiv ux + vy + wz. \qquad \textbf{6)}$$

Setzt man hier die Formel 3a) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} UX + VY + WZ \equiv & (a_1 u + a_2 v + a_3 w) X \\ & + (b_1 u + b_2 v + b_3 w) Y \\ & + (c_1 u + c_2 v + c_3 w) Z. \end{aligned}$$

Da diese Identität für jeden Punkt X, Y, Z bestehen soll, so löst sie sich in die drei Gleichungen auf:

$$\begin{aligned} U &= a_1 u + a_2 v + a_3 w \\ V &= b_1 u + b_2 v + b_3 w \\ W &= c_1 u + c_2 v + c_3 w \end{aligned} \qquad \textbf{3c)}$$

und hieraus endlich durch Auflösung nach u, v, w:

$$\begin{aligned} \Delta \cdot u &= A_1 U + B_1 V + C_1 W \\ \Delta \cdot v &= A_2 U + B_2 V + C_2 W \\ \Delta \cdot w &= A_3 U + B_3 V + C_3 W \end{aligned} \qquad \textbf{3d)}$$

Es bleibt aber noch eine letzte Frage zu lösen. Was bedeuten denn nun die so eingeführten Dreieckskoordinaten u, v, w der geraden Linie im geometrischen Sinne?

Zur Beantwortung stelle man sich irgend eine Gerade mit den Koordinaten u, v, w, also mit der Gleichung vor (in Fig. 78 die Linie DEF):

$$ux + vy + wz = 0.$$

Für den Punkt D ist $x = 0$, also:

$$vy + wz = 0, \text{ oder } \frac{v}{w} = -\frac{z}{y}.$$

Nach den Gleichungen Seite 256 ist aber:

$$\frac{z}{y} = \lambda \cdot \frac{q}{p},$$

wo λ einen constanten Faktor bedeutet $\left(\lambda = \frac{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\right)$.

Ferner zeigt die Figur, dass

$$\begin{aligned} p &= DC \cdot \sin \gamma \\ q &= DB \cdot \sin \beta. \end{aligned}$$

Daher:

$$\frac{z}{y} = \lambda \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \cdot \frac{DB}{DC} = \lambda_1 \cdot \frac{DB}{DC}$$

$$\left(\lambda_1 = \lambda \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \text{ also } \lambda_1 \text{ auch constant}\right),$$

daher endlich:

$$\frac{v}{w} = -\lambda_1 \cdot \frac{DB}{DC},$$

d. h. sind u, v, w die Koordinaten einer Geraden l, so ist das Verhältniss $\frac{v}{w}$ = dem mit einem konstanten Faktor multiplicirten einfachen Verhältniss des Schnittpunktes D dieser Geraden mit der Grundlinie $x = 0$ zu den auf dieser Grundlinie liegenden Ecken B und C des Grunddreiecks.

Entsprechendes gilt natürlich auch für die Verhältnisse $\frac{w}{u}$ und $\frac{u}{v}$.

Transformation der Koordinaten von einem Dreieck auf ein anderes.

Es seien wieder x, y, z die Koordinaten irgend eines Punktes P in unserm Dreieck und x', y', z' die Koordinaten desselben Punktes in Bezug auf irgend ein anderes Dreieck. Die letzteren müssen dann aus den rechtwinkligen X, Y, Z durch Gleichungen von derselben Form wie 3a) nur mit anderen Coefficienten a'_1, b'_1 u. s. w., verknüpft sein, so dass

$$\begin{aligned} x' &= a'_1 X + b'_1 Y + c'_1 Z \\ y' &= a'_2 X + b'_2 Y + c'_2 Z \\ z' &= a'_3 X + b'_3 Y + c'_3 Z. \end{aligned}$$

Setzt man hier die Umkehrungen von 3a), nämlich die Formeln 3b) ein, so entstehen die gesuchten Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z, \end{aligned} \qquad 7)$$

wo:

$$\alpha_1 = \frac{a'_1 A_1 + b'_1 B_1 + c'_1 C_1}{\Delta} \text{ u. s. w.}$$

Daher der Satz:

Der Uebergang von einem Dreieck zu einem anderen geschieht durch irgend welche homogene, lineare Transformationen.

Dies gilt zunächst für Punktkoordinaten. Für Linienkoordinaten wird der Beweis ganz ähnlich geführt, vortheilhafter ist es aber, sich an die Identität

$$ux + vy + wz \equiv u'x' + v'y' + w'z'$$

zu halten, die nach Einführung von 7) sofort zu den Formeln führt:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 u' + \alpha_2 v' + \alpha_3 w' \\ v &= \beta_1 u' + \beta_2 v' + \beta_3 w' \\ w &= \gamma_1 u' + \gamma_2 v' + \gamma_3 w'. \end{aligned} \qquad \textbf{7b)}$$

In den hier entwickelten Dreieckskoordinaten hat selbstverständlich nur eine homogene Gleichung zwischen x, y, z, beziehungsweise u, v, w einen Sinn, da es eben nur auf die Verhältnisse von $x:y:z$ oder $u:v:w$ ankommt. Der lineare Uebergang von Dreieck zu Dreieck beweist auch, dass der Grad der Gleichung einer Kurve genau wie früher von dem gewählten Koordinatensystem durchaus unabhängig ist. Der Vortheil der Dreieckskoordinaten gegenüber den rechtwinkligen liegt in ihrer grösseren Allgemeinheit, welche eine viel gründlichere Umgestaltung der Gleichungen durch Transformation erlaubt, als es bei rechtwinkligen Koordinaten möglich ist. Im übrigen aber halte man fest, dass Dreieckskoordinaten nicht etwa von rechtwinkligen Koordinaten ganz und gar verschieden sind, sondern dass aus den ersteren, wie zu Anfang erläutert, sofort wieder die letzteren werden, wenn man die eine Seite ($z = 0$) des Grunddreiecks unendlich fern und die beiden anderen senkrecht aufeinander annimmt.

Der wahre Charakter der Dreieckskoordinaten wird besonders in den letzten Paragraphen dieses Buches hervortreten, ihre umständliche geometrische Deutung gegenüber der vollendet einfachen Definition rechtwinkliger Koordinaten lässt aber wohl schliessen, dass sie einem besonderen Zweck dienen sollen.

Einige Anwendungen der Dreieckskordinaten.

Satz: Sind $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ irgend zwei Punkte, so wird ein beliebiger Punkt $P\,(x, y, z)$ auf der Verbindungslinie durch die Formeln dargestellt:

$$x = x_1 + \lambda x_2,\; y = y_1 + \lambda y_2,\; z = z_1 + \lambda z_2. \qquad \textbf{8)}$$

Beweis: Es seien u, v, w die Koordinaten dieser Geraden. Da diese durch P_1 und P_2 geht, so folgt:

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0$$
$$ux_2 + vy_2 + wz_2 = 0,$$

also auch:

$$u(x_1 + \lambda x_2) + v(y_1 + \lambda y_2) + w(z_1 + \lambda z_2) = 0,$$

d. h. der Punkt $x_1 + \lambda x_2$, $y_1 + \lambda y_2$, $z_1 + \lambda z_2$ liegt auch auf der Geraden u, v, w. q. e. d.

Reciproker Satz:

Sind $l_1 (u_1, v_1, w_1)$, $l_2 (u_2, v_2, w_2)$ die Koordinaten von irgend zwei Geraden, so wird eine beliebige, durch den Schnittpunkt von l_1 und l_2 gehende Gerade durch die Formeln dargestellt:

$$u = u_1 + \lambda u_2,\ v = v_1 + \lambda v_2,\ w = w_1 + \lambda w_2. \qquad \mathbf{9)}$$

Beweis: Dem vorigen genau analog.

Satz: Setzt man in 8) für λ der Reihe nach vier Werthe λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 ein und bezeichnet die so erhaltenen Punkte mit Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, so ist

Doppelverhältniss $(Q_1 Q_2 Q_3 Q_4) = \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)}$ (siehe § 9).

Beweis: Macht man in 8) die Transformationen 3a), so gelten für X, Y, Z die entsprechenden Gleichungen, also auch

$$X = X_1 + \lambda X_2,\ Y = Y_1 + \lambda Y_2,\ Z = Z_1 + \lambda Z_2,$$

und hieraus:

$$\xi = \frac{X}{Z} = \frac{X_1 + \lambda X_2}{Z_1 + \lambda Z_2},$$

d. h. die Abscisse des durch λ dargestellten Punktes ist eine lineare Funktion von λ, womit der Satz bewiesen ist (nach § 1).

Satz: Setzt man in 9) für λ der Reihe nach λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, so ist das Doppelverhältniss der vier herausgegriffenen Strahlen L_1, L_2, L_3, L_4 durch den Ausdruck $\frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)}$ bestimmt.

Beweis: Die Transformationen 3c) ergeben:

$$U = U_1 + \lambda U_2,\ V = V_1 + \lambda V_2,\ W = W_1 + \lambda W_2,$$

daher:

$$\frac{U}{V} = \frac{U_1 + \lambda U_2}{V_1 + \lambda V_2},$$

d. h. der Richtungscoefficient $m = -\frac{U}{V}$ ist eine lineare Funktion von λ, womit der Satz erwiesen ist.

Setzt man im besonderen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \infty$, $\lambda_3 = -\lambda_4$, so wird das Doppelverhältniss $= -1$, d. h.:

Vier Punkte $P_1(x_1 y_1 z_1)$ $P_2(x_2 y_2 z_2)$ $P_3(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$ $P_4(x_1 - \lambda x_2, y_1 - \lambda y_2, z_1 - \lambda z_2)$ sind vier harmonische Punkte, und ebenso bilden vier Gerade $l_1(u_1 v_1 w_1)$, $l_2(u_2 v_2 w_2)$, $l_3(u_1 + \lambda u_2, v_1 + \lambda v_2, w_1 + \lambda w_2)$, $l_4(u_1 - \lambda u_2, v_1 - \lambda v_2, w_1 - \lambda w_2)$ vier harmonische Strahlen.

Es sei ABC das zu Grunde gelegte Koordinatendreieck und $P_1(x_1 y_1 z_1)$ irgend ein Punkt. Die durch A, B, C nach P_1 gezogenen Strahlen haben die Gleichungen:

$$xy_1 - yx_1 = 0,\ yz_1 - zy_1 = 0,\ zx_1 - xz_1 = 0.$$

Nach dem vorigen Satz sind die durch die Ecken gehenden vierten harmonischen Strahlen:

$$xy_1 + yx_1 = 0,\ yz_1 + zy_1 = 0,\ zx_1 + xz_1 = 0.$$

Sie bilden mit den vorigen drei Strahlen die 6 Seiten eines vollständigen Vierecks. Die eine Ecke ist der Punkt $P_1(x_1 y_1 z_1)$, eine zweite ist der Durchschnitt der Strahlen:

$$zx_1 + xz_1 = 0,\ xy_1 + yx_1 = 0,\ yz_1 - zy_1 = 0,$$

welche sich in einem Punkte $P_2(x_1, -y_1, -z_1)$ schneiden.

Ebenso ergeben sich $P_3(-x_1, +y_1, -z_1)$ und $P_4(-x_1, -y_1, +z_1)$ als Schnittpunkte von:

$$xy_1 + yx_1 = 0,\ yz_1 + zy_1 = 0,\ zx_1 - xz_1 = 0$$

und

$$xy_1 - yx_1 = 0,\ yz_1 + zy_1 = 0,\ zx_1 + xz_1 = 0.$$

Diese vier Punkte:

$$P_1(+x_1, +y_1, +z_1),\ P_2(+x_1, -y_1, -z_1),\ P_3(-x_1, +y_1 - z_1),$$
$$P_4(-x_1, -y_1, +z_1)$$

sind demnach die vier Ecken eines vollständigen Vierecks, dessen Diagonaldreieck mit dem Grunddreiecke zusammenfällt. Ihre Koordinaten stimmen, vom Vorzeichen abgesehen, überein, und man nennt sie deshalb auch vier zum Grunddreieck symmetrisch liegende Punkte. Ist das Grunddreieck nämlich wieder aus der unendlich fernen geraden Linie und zwei zu einander senkrechten Koordinatenachsen gebildet, so liegen die vier Punkte thatsächlich zu den Achsen symmetrisch, denn ihre rechtwinkligen Koordinaten werden dann $+x, +y$; $+x, -y$; $-x, -y$; $-x, +y$.

Ganz ebenso nennt man vier Gerade:

$$+u, +v, +w;\ -u, -v, -w;\ -u, +v, -w;$$
$$-u, -v, +w$$

symmetrisch zum Grunddreieck. Sie bilden die vier Seiten

eines vollständigen Vierseits, dessen Diagonaldreieck eben dieses Grunddreieck ist.

Zum Schluss noch zwei Aufgaben, welche vorläufig die Verwendbarkeit der Dreieckskoordinaten zeigen.

Erste Aufgabe: Es soll die Form der Gleichung eines Kegelschnittes gefunden werden, der durch irgend drei gegebene Punkte hindurchgeht.

Lösung: Man mache die Punkte zu Ecken eines Koordinatendreiecks. Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte überhaupt ist:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0.$$

Soll der Kegelschnitt durch die Ecke $y = 0$, $z = 0$ hindurchgehen, so findet man durch Einsetzen $a_{11} = 0$. Entsprechend folgt $a_{22} = 0$, $a_{33} = 0$. Folglich ist die Form der gesuchten Gleichung:

$$a \cdot yz + b \cdot zx + c \cdot xy = 0.$$

Bemerkung: Beim Uebergang von Dreieckskoordinaten zu rechtwinkligen Koordinaten sind $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ nichts anderes, als die Gleichungen der drei Verbindungslinien je zweier der drei gegebenen Punkte. In diesem Sinne kann man also die Gleichung:

$$a \cdot yz + b \cdot zx + c \cdot xy = 0$$

auch ansehen als eine Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten, nachdem hinterher für x, y, z ihre linearen Ausdrücke 3) in ξ und η eingesetzt worden sind. Dann erscheinen eben x, y, z als abkürzende Symbole für diese linearen Ausdrücke.

2te Aufgabe.

Es soll die Form der Gleichung eines Kegelschnittes gefunden werden, der zwei gegebene Gerade in gegebenen Punkten berührt.

Lösung: Man mache die beiden gegebenen Tangenten zu den Seiten $y = 0$, $z = 0$ und die Verbindungslinie der Berührungspunkte zur Seite $x = 0$ des Fundamentaldreiecks. Da die Kurve durch die Ecken $x = 0$, $y = 0$ und $x = 0$, $z = 0$ hindurchgehen soll, so folgt wie vorhin: $a_{22} = 0$, $a_{33} = 0$. Die Gleichung hat daher die Form:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0.$$

Setzt man hier $y = 0$, so wird $a_{11}x^2 + 2a_{13}xz = 0$, also entweder $x = 0$ oder $a_{11}x + 2a_{13}z = 0$. Weil aber $y = 0$

Tangente sein soll, müssen die beiden Durchschnittspunkte zusammenfallen und die letztere Gleichung muss sich daher auch auf $x = 0$ reduciren. Es ist also $a_{13} = 0$ und ebenso $a_{12} = 0$. Die Gleichung der Kurve hat somit die einfache Form:

$$x^2 - \lambda \cdot yz = 0,$$

welche eigentlich noch einfacher ist, als die Mittelpunktsgleichung, da sie nur zwei Glieder enthält. — Lässt man $x = 0$ mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen, so werden $y = 0$ und $z = 0$ zu Asymptoten und man erhält:

$$y \cdot z = \text{constans}$$

als Asymptotengleichung der Hyperbel (siehe § 16).

Lässt man ferner die eine Tangente $z = 0$ mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen, so wird die Kurve zur Parabel und man erhält:

$$x^2 - \lambda \cdot y = 0$$

als Gleichung derselben, bezogen auf irgend eine Tangente und die durch den Berührungspunkt gehende Parallele zum Durchmesser (siehe § 16).

Da x, y und z zu den Loten auf die Seite des Grunddreiecks proportional sind, so lässt die Gleichung $x^2 - \lambda yz = 0$ folgende einfache Deutung zu:

Das Rechteck aus den beiden Loten, die von einem Punkt einer Kurve zweiter Ordnung auf zwei gegebene Tangenten gefällt worden sind, steht zum Quadrat des Lotes von diesem Punkt auf die Sekante durch die Berührungspunkte in einem von der Lage des Punktes ganz unabhängigen Verhältniss.

Aufgaben.

1. Das Grunddreieck habe die Seiten a, b, c. Als Koordinaten eines Punktes P werden die Lote x, y, z mit der Massgabe genommen, dass sie positiv sind, wenn P auf derselben Seite der betreffenden Grundlinie liegt, wie die Gegenecke. Es sind abzuleiten: 1. Die Gleichung der unendlich fernen Geraden. 2. Des umbeschriebenen Kreises. 3. Der drei Höhen.

2. Gegeben der Kegelschnitt:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0.$$

Die Bedingung zu finden, dass die Grundlinie $z = 0$ ihn in zwei reellen oder in zwei imaginären oder in zwei zu-

sammenfallenden Punkten schneidet (im letzteren Falle berührt). Ableitung der Kriterien für Ellipse, Hyperbel oder Parabel des § 17 als einen besonderen Fall.

3. Das Grunddreieck der Aufgabe 1) sei gleichseitig. Es werde um den Schwerpunkt herum um 180° gedreht. Die Koordinatentransformationsformeln sind abzuleiten.

---

§ 22.

Theorie von Pol und Polare.
Ein- und umbeschriebene Vierecke eines Kegelschnittes.

Erklärung 1: Das Glied x^2 polarisiren, heisst, an seine Stelle ein Produkt $x \cdot x_1$ setzen.

Erklärung 2: Das Glied $x \cdot y$ polarisiren, heisst, an seine Stelle zu setzen $\frac{x \cdot y_1 + x_1 \cdot y}{2}$. Für $2xy$ oder $x \cdot y + x \cdot y$ wird demnach $x \cdot y_1 + x_1 \cdot y$ gesetzt werden müssen.

Erklärung 3:

Den quadratischen Ausdruck:

$$F(x,y,z) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 \quad \mathbf{1)}$$

polarisiren, heisst, in ihn ausser der Reihe x, y, z noch eine zweite Reihe x_1, y_1, z_1 derart einführen, dass an Stelle eines jeden Gliedes sein polarer Ausdruck gesetzt wird, so dass die Form sich umwandelt in:

$$a_{11}xx_1 + a_{12}(xy_1 + yx_1) + a_{22}yy_1 + a_{13}(xz_1 + zx_1) + a_{23}(yz_1 + zy_1) + a_{33}zz_1. \quad \mathbf{1')}$$

(Soll F nicht homogen genommen werden, so setze man $z = z_1 = 1$).

Wir wollen die Form 1') mit $\varphi(x, y, z; x_1, y_1, z_1)$ oder auch kurz mit $\varphi(x; x_1)$ bezeichnen, worauf x für die Reihe x, y, z und x_1 für die Reihe x_1, y_1, z_1, steht. Aus der durch 1') gegebenen Definition fliessen sofort folgende Eigenschaften.

1. Es ist

$$\varphi(x; x_1) \equiv \varphi(x_1; x),$$

d. h. bei Vertauschung der beiden Reihen x, y, z und x_1, y_1, z_1 ändert sich die Form nicht. Die Polarform hat „involutorischen“ Charakter.

2. Setzt man die Reihen identisch gleich, also $x_1 = x$,

$y_1 = y$, $z_1 = z$, so verwandelt sich die Polarform wieder in die ursprüngliche Form, d. h. es ist:

$$\varphi(x, x) \equiv F(x, y, z)$$

Die Form $\varphi(x; x_1)$ ist „bilinear", insofern sie sowohl für die Reihe x, y, z als auch für die Reihe x_1, y_1, z_1 linear ist: Ordnet man sie nach Potenzen von x, y, z, so folgt:

$$\varphi(x; x_1) = (a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1)x + (a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1)y + (a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1)z, \qquad 2)$$

ebenso aber wird auch:

$$\varphi(x; x_1) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)x_1 + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)y_1 + (a_{31}x + a_{32}y + a_{32}z)z_1. \qquad 2')$$

Die Coefficienten von x_1, y_1, z_1 in diesem Ausdruck, nämlich:

$$\begin{aligned} u &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ v &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ w &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned} \qquad 3)$$

sind uns wohlbekannt, da sie bereits bei der Diskussion der allgemeinen Gleichung 2ten Grades in § 17 und 18 eine grosse Rolle gespielt haben. Ihre Substitutionsdeterminante:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}$$

ist mit der dort eingeführten „grossen Diskriminante" identisch. In Folge ihrer Symmetrie ($a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32}$) hat sie nur 6 verschiedene Unterdeterminanten, nämlich:

$$\begin{aligned} A_{11} &= a_{22} \cdot a_{33} - a_{23}^2 \\ A_{22} &= a_{33} \cdot a_{11} - a_{31}^2 \\ A_{33} &= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 \quad (A_{33} \text{ ist das frühere } \Delta) \\ A_{12} &= A_{21} = a_{31} \cdot a_{32} - a_{33} \cdot a_{12} \\ A_{23} &= A_{32} = a_{12} \cdot a_{13} - a_{11} \cdot a_{23} \\ A_{31} &= A_{13} = a_{23} \cdot a_{21} - a_{22} \cdot a_{31}. \end{aligned} \qquad 4)$$

Nach ihrer Einführung ergeben die Gleichungen 3) durch Auflösung nach x, y, z:

$$\begin{aligned} D \cdot x &= A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w \\ D \cdot y &= A_{21}u + A_{22}v + A_{23}w \\ D \cdot z &= A_{31}u + A_{32}v + A_{33}w. \end{aligned} \qquad 5)$$

Den Gleichungen 3) entsprechen die Gleichungen für die zweite Reihe x_1, y_1, z_1, also:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 \\ v_1 &= a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1 \\ w_1 &= a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 \end{aligned} \qquad 3')$$

mit den Auflösungen:

$$\begin{aligned} D \cdot x_1 &= A_{11}u_1 + A_{12}y_1 + A_{13}w_1 \\ D \cdot y_1 &= A_{21}u_1 + A_{22}v_1 + A_{23}w_1 \\ D \cdot z_1 &= A_{31}u_1 + A_{32}v_1 + A_{33}w_1. \end{aligned} \qquad 5')$$

Die Formeln 3) und 3') verwandeln nach 2) und 2') die Funktion $\varphi(x,x')$ in:

$$\varphi(x;x_1) = ux_1 + vy_1 + wz_1 = u_1x + v_1y + w_1z, \qquad 6)$$

und setzt man hier für x, y, z die Ausdrücke 5) oder für x_1, y_1, z_1 die Ausdrücke 5'), so folgt beide Male dasselbe, nämlich:

$$\begin{aligned} \varphi(x,x_1) = \frac{1}{\Delta}\,[A_{11}uu_1 &+ A_{12}(uv_1 + vu_1) + A_{22}vv_1 \\ &+ A_{13}(uw_1 + wu_1) + A_{23}(vw_1 + wv_1) + A_{33}ww_1]. \end{aligned} \qquad 7)$$

Werden endlich die beiden Reihen x, y, z; x_1, y_1, z_1; also auch die beiden Reihen u, v, w; u_1, v_1, w_1 identisch, so folgt also:

$$\begin{aligned} \varphi(x,x) = F(x,y,z) = \frac{1}{\Delta}\,[A_{11}u^2 &+ 2A_{12}uv + A_{22}v^2 \\ &+ 2A_{13}uw + 2A_{23}vw + A_{33}w^2]. \end{aligned} \qquad 8)$$

Die so gewonnene quadratische Form:

$$\begin{aligned} \psi(u,v,w) = A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 &+ 2A_{13}uw \\ &+ 2A_{23}vw + A_{33}w^2 \end{aligned} \qquad 9)$$

wird die reciproke Form von $F(x,y,z)$ genannt. Sie spielt nicht allein hier, sondern auch in vielen anderen Zweigen der Mathematik eine ausserordentlich wichtige Rolle. Nach den Entwickelungen des § 20 (Determinanten) sind die Beziehungen zwischen den Coefficienten a_{11}, a_{12} ... der ursprünglichen Form und den Coefficienten A_{11}, A_{12} ... der reciproken Form, vom Faktor D abgesehen, umkehrbar, denn es wird:

$$\begin{aligned} Da_{11} &= A_{22}A_{33} - A_{23}^2 \\ Da_{22} &= A_{33}A_{11} - A_{31}^2 \\ Da_{33} &= A_{11}A_{22} - A_{12}^2 \\ Da_{12} &= Da_{21} = A_{31}A_{32} - A_{33}A_{12} \\ Da_{23} &= Da_{32} = A_{12}A_{13} - A_{11}A_{23} \\ Da_{31} &= Da_{13} = A_{23}A_{21} - A_{22}A_{31}. \end{aligned} \qquad 4')$$

Daher: Die reciproke Form der reciproken Form ist die mit dem Faktor D multiplicirte ursprüngliche Form. So lange also D nicht verschwindet, sind die Beziehungen zwischen beiden Formen sofort umkehrbar. Für $D = 0$ indessen kann man nach 5') von A_{11}, A_{12} etc. nicht wieder zu a_{11}, a_{12} etc. zurückgelangen, vielmehr sagen dann diese Gleichungen aus, dass in der Determinante:

$$D' = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{13} \\ A_{21}, & A_{22}, & A_{23} \\ A_{31}, & A_{32}, & A_{33} \end{vmatrix}$$

die Reihen in Proportion stehen, also:

$$A_{11} : A_{12} : A_{13} = A_{21} : A_{22} : A_{23} = A_{31} : A_{32} : A_{33}.$$

Wird daher für diesen Fall gesetzt:

$$A_{12} = \alpha A_{11}, \quad A_{13} = \beta A_{11},$$

so folgt:

$$A_{22} = \alpha A_{12} = \alpha^2 A_{11}, \; A_{23} = \beta A_{21} = \alpha\beta A_{11},$$
$$A_{33} = \beta A_{31} = \beta^2 A_{11},$$

und die Gleichung 9) giebt:

$$\varphi(u, v, w) = A_{11}(u + \alpha v + \beta w)^2. \qquad \textbf{9a)}$$

Die reciproke Form wird hiernach ein reines Quadrat.

Die Beziehungen zwischen einer Form und ihrer reciproken Form werden besonders einfach, wenn die Form „rein“ ist, d. h. wenn die Produkten-Glieder fehlen, oder $a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0$, wenn daher:

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2.$$

Dann wird nach 4) auch $A_{12} = A_{23} = A_{31} = 0$ und:

$$A_{11} = a_{22}a_{33}, \; A_{22} = a_{23}a_{11}, \; A_{33} = a_{11}a_{22}.$$

Die reciproke Form erscheint daher auch „rein“, sie wird:

$$\psi(u, v, w) = A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 = a_{22}a_{33}u^2 + a_{33}a_{11}v^2 + a_{11}a_{22}w^2$$
$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}\left(\frac{u^2}{a_{11}} + \frac{v^2}{a_{22}} + \frac{w^2}{a_{33}}\right)$$

d. h. an Stelle der Coefficienten a_{11}, a_{22}, a_{33} sind, kurz gesagt, ihre reciproken Werthe getreten.

Noch ein anderer Fall, in welchem sich die Beziehungen ausserordentlich vereinfachen, bezieht sich auf die Form:

$$F(x, y) = xy + \lambda z^2,$$

für welche also $a_{11} = a_{22} = a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{12} = 1$, $a_{33} = \lambda$.

Es wird dann nach 4):

$$A_{11} = A_{22} = A_{13} = A_{23} = 0,\ A_{12} = -\lambda,\ A_{33} = -1.$$

Daher:

$$\psi(u, v, w) = -(\lambda uv + w^2) = -\lambda\left(uv + \frac{w^2}{\lambda}\right).$$

Setzt man in 1) statt x, y, z lineare Verbindungen der beiden Reihen x, y, z; x_1, y_1, z_1 ein, nämlich:

$$\xi = x + \lambda x_1,\ y = y + \lambda y_1,\ \zeta = z + \lambda z_1 \qquad \textbf{10)}$$

und bildet auf diese Weise:

$$F(\xi, \eta, \zeta) = F(x + \lambda x_1,\ y + \lambda y_1,\ z + \lambda z_1),$$

so folgt auf der Stelle bei Entwickelung nach Potenzen von λ:

$$F(x + \lambda x_1, y + \lambda y_1, z + \lambda z_1) = \varphi(x; x) + 2\lambda \cdot \varphi(x; x_1) + \lambda^2 \cdot \varphi(x_1; x_1). \qquad \textbf{11)}$$

Diese Entwickelung hätte daher auch umgekehrt zur Definition der bilinearen Polarform der gegebenen Form benutzt werden können.

Die hier vorangestellten Formeln enthalten in streng analytischem Gewande die schöne Theorie von Pol und Polare in ihrer ganzen Allgemeinheit und gleichgiltig, ob der Kegelschnitt auf ein rechtwinkliges, oder schiefwinkliges, oder auf ein Dreieckskoordinatensystem bezogen ist. Es bedarf nur noch der geometrischen Deutung, die aber sofort, wie folgt, gegeben werden kann.

Vorgelegt sei ein Kegelschnitt in Punktkoordinaten mit der Gleichung 1). Es seien ferner x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Koordinaten irgend zweier Punkte P und P_1, über deren Lage vorläufig nichts vorausgesetzt wird, die also im allgemeinen sich nicht auf dem Kegelschnitt befinden werden. Dann werden nach 8) § 21 die Koordinaten ξ, η, ζ irgend eines dritten Punktes Q auf der Verbindungslinie PP_1 durch die Formeln 10) gegeben. Soll dieser Punkt ein Schnittpunkt dieser Geraden und des Kegelschnittes werden, so sind seine Koordinaten ξ, η, ζ in die Gleichung $F(\xi, \eta, \zeta)$ einzusetzen, worauf sich für λ nach 11) die quadratische Gleichung:

$$\varphi(x; x) + 2\lambda \cdot \varphi(x; x_1) + \lambda^2 \cdot \varphi(x_1; x_1) = 0 \qquad \textbf{12)}$$

herausstellt, deren beide Wurzeln λ_1 und λ_2 den beiden Durchschnittspunkten (Q_1 und Q_2) entsprechen.

Von ganz besonderer Wichtigkeit ist dann der Fall, dass

sie zu P und P_1 harmonisch liegen, oder dass, wie man sagt, P und P_1 durch den Kegelschnitt harmonisch getrennt sind. Man nennt dann P und P_1 zwei zugehörige oder conjugirte Pole des Kegelschnittes. Nach Seite 262 müssen dann die beiden aus 12) entstehenden Werthe für λ entgegengesetzt gleich sein, was nur eintritt, wenn $\varphi(x; x_1) = 0$. Daher:

Die Gleichung: $\varphi(x; x_1) = 0$ ist die Bedingung dafür, dass die beiden Punkte $P(x, y, z)$ und $P_1(x_1, y_1, z_1)$ conjugirte Pole des Kegelschnittes sind.

Bemerkung: Die Gleichung 12) wird dann $\varphi(x, x) + \lambda^2 \cdot \varphi(x_1, x_1) = 0$ und giebt, wenn $\varphi(x, x)$ und $\varphi(x_1 x_1)$ dasselbe Zeichen haben, für λ zwei entgegengesetzt gleiche, aber imaginäre Werthe. Aber auch dann heissen P und P_1 conjugirte Pole, trotzdem sie durch den Kegelschnitt nicht getrennt sind. Es kann sogar der ganze Kegelschnitt imaginär sein, ohne dass conjugirte Pole auch imaginär werden.

Zu jedem Punkt $P(x, y, z)$ giebt es unzählig viele conjugirte Pole $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Denn auf jedem durch P gehenden Strahl liegt ein solcher, als der vierte harmonische Punkt zu P und den beiden Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt. Der geometrische Ort derselben ist eben die Gleichung:

$$\varphi(x, x_1) = 0,$$

wenn in derselben $P(x_1, y_1, z_1)$ als veränderlich angesehen wird. Da diese Gleichung für x_1, y_1, z_1 vom ersten Grade ist, so folgt der Satz:

Die conjugirten Pole eines Punktes $P(x, y, z)$ liegen auf einer Geraden l, welche die Polare von P genannt wird.

Ihre Koordinaten u, v, w werden durch die Gleichungen 3) bestimmt. Umgekehrt gehört zu jeder Geraden l (u, v, w) ein Punkt $P(x, y, z)$ als Pol, der durch die Umkehrungen von 3), das sind die Formeln 5), zu ermitteln ist.

Gesetzt der Punkt $P(x, y, z)$ liege auf dem Kegelschnitt, dann ist $F(x, y, z)$, d. h. $\varphi(x, x) = 0$. Die Gleichung 12) reducirt sich daher, wenn $P_1(x_1, y_1, z_1)$ irgend ein Punkt der Polare von P ist, auf $\lambda^2 \cdot \varphi(x_1, x_1) = 0$ oder auf $\lambda^2 = 0$. Die Schnittpunkte der Polare mit dem Kegelschnitt fallen somit beide mit P zusammen, die Polare wird zur Tangente. Aber auch umgekehrt, wenn ein Punkt $P(x, y, z)$ auf seiner

Polare $l(u, v, w)$ liegt, so ist P ein Punkt des Kegelschnittes und l die Tangente in P. Denn setzt man in $\varphi(x, x_1) = 0$ die beiden Punkte P und P_1 identisch, so reducirt sich $\varphi(x, x_1)$ auf $\varphi(x, x) = F(x, y, z)$.

Daher: Setzt man in 3) für x, y, z irgend einen Punkt des Kegelschnittes, so wird u, v, w die Tangente in diesem Punkte und ferner nach 8) und 9):

Ist $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung eines Kegelschnittes in Punktkoordinaten, so ist $\psi(u, v, w) = 0$ die Gleichung desselben Kegelschnittes in Linienkoordinaten. Ursprüngliche Form und reciproke Form stellen denselben Kegelschnitt vor.

Hiermit ist endlich der strenge Nachweis geführt, dass jede Kurve zweiter Ordnung auch von der zweiten Klasse ist und umgekehrt (Seite 136). Zerfällt aber die Kurve zweiter Ordnung in 2 gerade Linien (ist $D = 0$), so wird ihre Tangentengleichung durch das Nullsetzen eines Quadrates angezeigt, wie vorhin ausgeführt (9a). Diese Gleichung stellt somit ein Strahlenbüschel doppelt vor, dessen Centrum selbstverständlich mit dem Schnittpunkt der beiden Geraden zusammenfallen muss. Nimmt man aber umgekehrt die Gleichung $\psi(u, v, w) = 0$ als gegeben an, und zerfällt diese gelegentlich in zwei Gleichungen (zwei Strahlenbüschel oder zwei Punkte darstellend), so wird die reciproke Gleichung $F(x, y, z) = 0$ ein reines Quadrat und stellt eine Doppellinie vor, die mit der Verbindungslinie beider Punkte zusammenfällt.

Halten wir uns aber nun an die allgemeine polare Verwandtschaft, deren analytischer Ausdruck die Gleichungen 3) beziehungsweise 5) sind. Nach ihr entspricht jedem Punkt eine Gerade und rückwärts jeder Geraden ein Punkt. Setzt man in 3) für $P(x, y, z)$ irgend einen andern Punkt $P'(x' y' z')$, so wird $l(u, v, w)$ in eine andere Linie $l'(u' v' w')$ verwandelt. Setzt man aber hierauf statt P irgend einen Punkt $(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$ auf der Verbindungslinie PP', so werden die Koordinaten der entsprechenden Geraden sofort $(u + \lambda u', v + \lambda v', w + \lambda w')$. Daher (nach 8) und 9) § 21):

Bewegt sich ein Punkt P auf einer Geraden, so beschreibt seine Polare ein projektivisches (aber nicht perspektivisches) Strahlenbüschel. Bringt man dieses Strahlenbüschel mit der Geraden zum Schnitt, so entstehen in letzterer zwei projek-

tivische in einander liegende Punktreihen. Aber noch mehr, diese Punktreihen liegen involutorisch, denn zwei auf diese Weise zugeordnete Punkte sind zugleich harmonische Pole und daher mit einander vertauschbar. Ordnet man daher in irgend einer Geraden jedem Punkt den ihm zugehörigen harmonischen Pol zu, so entsteht eine involutorische Verwandtschaft, und augenscheinlich sind die Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt die Doppelpunkte dieser Involution.

Gesetzt, zwei Punkte $P(x,y,z)$ und $P_1(x_1\,y_1\,z_1)$ seien conjugirte Pole und es sei daher die Gleichung $\varphi(x;x_1)=0$ erfüllt. Ihre Polaren werden durch die Gleichungen 3) beziehungsweise 3') gegeben, nach deren Einsetzen sich die Gleichung $\varphi(x;x_1)=0$ in die Gleichung 7) verwandelt, wenn man die dort aufgeschriebene Funktion $=0$ setzt. Wie daher die Punkte P und P_1 durch die Punkte des Kegelschnittes harmonisch getrennt sind, so ihre Polaren l und l_1 durch die Tangenten (nämlich diejenigen, welche durch den Schnittpunkt von l und l_1 hindurchgehen). Und wie auf jeder Geraden durch Zuordnung conjugirter Pole eine Involution gebildet wird, so entsteht für jeden Punkt durch Zuordnung conjugirter Polaren ein involutorisch auf sich selbst bezogenes Strahlenbüschel, dessen Doppelstrahlen die Tangenten von diesem Punkte an den Kegelschnitt sind.

Genug, die Reciprocität oder Dualität der polaren Verwandtschaft erscheint geometrisch und analytisch betrachtet durchaus vollkommen. Einen gewissen Abschluss erhält sie durch die Theorie der Polardreiecke eines Kegelschnittes, mit welcher es folgende Bewandniss hat. (Fig. 79.)

Man wähle irgend einen Punkt $P(x,y,z)$ und bestimme seine Polare $l(u,v,w)$. Auf l wähle man irgend einen zweiten Punkt $P_1(x_1,y_1,z_1)$ und ermittele gleichfalls seine Polare $l_1(u_1\,v_1\,w_1)$, die durch P gehen muss (da P und P_1 conjugirte Pole sind). Dann ist der Schnittpunkt P_2 von l und l_1 sowohl zu P als auch P_1 conjugirt, also fällt seine Polare l_2 mit PP_1 zusammen. So wird ein Dreieck PP_1P_2 erzeugt, das „sich selbst“ polar ist, insofern jeder Ecke die Gegenseite als Polare und jeder Seite die Gegenecke als Pol entspricht.

Die besondere Wichtigkeit eines Polardreiecks tritt hervor, wenn es zum Grunddreieck eines Koordinatensystems

gemacht wird. Es möge dann der Punkt P die Koordinaten $y=0$, $z=0$, P_1 die Koordinaten $z=0$, $x=0$, P_2 die Koordinaten $x=0$, $y=0$ haben, so dass der Geraden l die Koordinaten $v=0$, $w=0$, l_1 die Koordinaten $w=0$, $u=0$, l_2 die Koordinaten $u=0$, $v=0$ zugehören. Setzt man daher in 3) $y=0$, $z=0$, so muss sich ergeben

$$v=0,\ w=0.$$

Es folgt aber:

$$0=a_{21}x,$$
$$0=a_{31}x.$$

Daher nach Weglassung von x:

$$a_{21}=a_{31}=0.$$

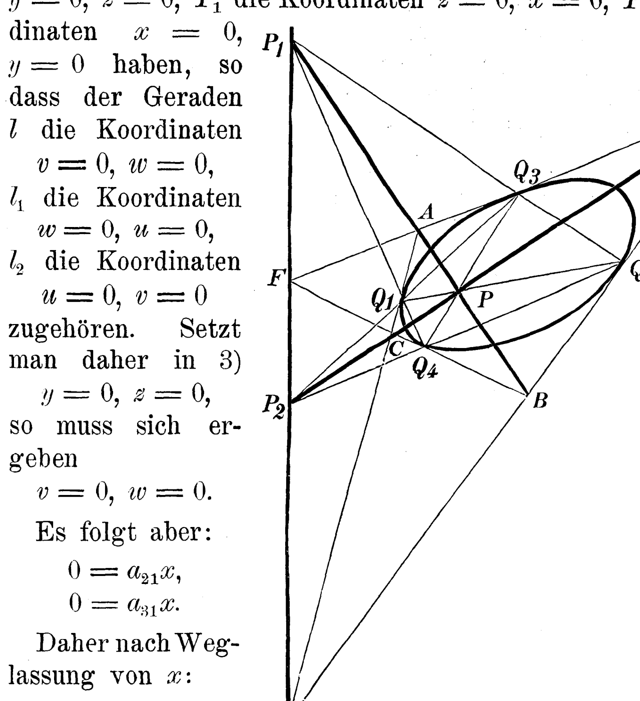


Fig. 79.

Ebenso ergiebt sich auch $a_{32}=0$ und somit der Satz:

Wenn das Grunddreieck ein Polardreieck des Kegelschnittes ist, so wird seine Gleichung „rein", d. h. von der Form:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2=0,$$

beziehungsweise:

$$\frac{u^2}{a_{11}}+\frac{v^2}{a_{22}}+\frac{w^3}{a_{33}}=0$$

(und umgekehrt).

Die Gleichungen 3) stellen analytisch die Beziehung zwischen Pol und Polare in einer Form fest, welche an Einfachheit nichts zu wünschen übrig lässt. Es erübrigt aber noch eine geometrische Construktion zum Uebergang vom Pol P zur Polare l und umgekehrt. Liegt der Pol P ausser-

halb des Kegelschnittes, so ziehe man von ihm die Tangenten und verbinde die Berührungspunkte, so ist die Polare gefunden (da die Berührungspunkte zu jedem Punkt der Tangente, also auch zu dem gegebenen Pol conjugirt sind). Liegt P auf dem Kegelschnitt, so fällt die Polare mit der Tangente zusammen. Liegt aber P innerhalb, so muss eine andere Construktion ersonnen werden. Eine solche, die aber auch dann passt, wenn P ausserhalb liegen sollte, entsteht wie folgt. (Fig. 79.)

Man ziehe durch P irgend zwei Gerade, die den Kegelschnitt in Q_1 und Q_2 beziehungsweise Q_3 und Q_4 schneiden, und nehme Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 als Ecken eines vollständigen Vierecks. Dann ist P die eine Ecke des Diagonaldreiecks (§ 3) und die Verbindungslinie P_1P_2 der beiden andern Ecken ist die Polare von P. Denn dieses Diagonaldreieck ist, wie aus den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks sofort folgt, zugleich ein Polardreieck des Kegelschnittes.

Zieht man weiter in Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 die vier Tangenten und betrachtet sie als ein vollständiges Vierseit, so liegen dessen Ecken A, B, C, D, E, F auf den Seiten dieses selben Polardreiecks. Denn A z. B. ist Pol von Q_1Q_3, welche Linie durch P_2 geht. Da nun PP_1 Polare von P_2 ist, so muss der Pol jeder durch P_2 gehenden Linie, also auch A auf PP_1 liegen. Mit anderen Worten:

Irgend vier Punkte eines Kegelschnittes, betrachtet als vollständiges Viereck und die vier Tangenten in diesen Punkten betrachtet als vollständiges Vierseit führen zu demselben Diagonaldreieck, welches zugleich ein Polardreieck des Kegelschnittes ist. Nach § 21, Seite 262, liegen dann die vier Punkte symmetrisch zum Diagonaldreieck und ebenso die vier Tangenten, was wieder mit dem Satz zusammenhängt, dass die Gleichung des Kegelschnitts, bezogen auf ein Diagonaldreieck, „rein" ist.

Als einfache aber beachtenswerthe Folgerung dieses merkwürdigen Satzes über ein- und umschriebene Vierecke ist noch der Satz zu nennen:

Ein einbeschriebenes Viereck $Q_1Q_2Q_3Q_4$ und das zugehörige umschriebene Viereck $ABCD$ haben die Eigenschaft, dass ihre vier Diagonalen Q_1Q_3, Q_2Q_4, AB und CD sich in einem Punkt P schneiden und dort vier harmonische Strahlen bilden.

2. Die eben entwickelte Theorie von Pol und Polare wird hoffentlich zur Genüge dargethan haben, ein wie helles Licht sie auf die Geometrie der Kegelschnitte wirft. Verfolgen wir sie noch in einige Einzelheiten hinein:

Die allgemeine Polarentheorie ist eine Erweiterung der früher abgehandelten Theorie der conjugirten Durchmesser. In der That, man nehme in unendlicher Ferne einen Punkt P als Pol an, so liegt, wenn durch ihn irgend ein Strahl gezogen wird, der den Kegelschnitt in zwei Punkten trifft, der vierte harmonische Punkt in der Mitte. Die Mitten paralleler Sehnen müssen daher auf einer Geraden liegen, nämlich der Polaren des unendlich fernen Punktes. Wenn nun der unendlich ferne Pol auf der unendlich fernen Geraden wandert, so muss seine Polare sich um einen festen Punkt, den Pol der unendlich fernen Geraden drehen, der offenbar der Mittelpunkt der Kurve ist.

Jede Sekante und der die abgeschnittene Sehne halbirende Durchmesser sind zwei conjugirte Polaren. Also sind auch dieser Durchmesser und der zur Sekante parallele Durchmesser conjugirte Polaren, die hier eben zu conjugirten Durchmessern werden und daraus folgt wieder, wie früher gezeigt, dass conjugirte Durchmesser eine Involution bilden. Zwei conjugirte Durchmesser und die unendlich ferne Gerade sind zusammen ein Polardreieck des Kegelschnittes, also muss, wie ja auch in § 16 gezeigt, die Gleichung des Kegelschnitts, bezogen auf conjugirte Durchmesser, rein quadratisch werden. Werden im besonderen die beiden zu einander senkrechten conjugirten Durchmesser genommen, so fällt man auf die gewöhnliche Mittelpunktsgleichung zurück:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ oder: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Nimmt man die Ellipse, so giebt die Gleichung 3) in diesem Falle, wenn $z = 1$ und u für $\frac{u}{w}$, v für $\frac{v}{w}$ gesetzt wird:

$$u = -\frac{x}{a^2}, \; v = -\frac{y}{b^2}$$

als Beziehung zwischen Pol und Polare in der einfachsten Form.

Wird statt des Punktes P im besondern der eine Brennpunkt $F(+e, 0)$ genommen, so folgt $u = -\frac{e}{a^2}$, $v = 0$, d. h.

$$p = \frac{a^2}{e}, \; q = \infty.$$

Daher nach § 13: Die Polare eines Brennpunktes ist die zugehörige Leitlinie. Die Tangenten in einem Brennpunkt sind nach § 14 Nulllinien, also sind irgend zwei zu einander senkrechte durch den Brennpunkt gehende Gerade einander conjugirt. Hieraus folgt weiter:

Zieht man durch einen Punkt der Leitlinie die beiden Tangenten, so geht die Berührungssehne durch den zugehörigen Brennpunkt uud steht senkrecht auf dem durch jenen Punkt gehenden Brennstrahl.

Wird ferner angenommen, dass in Figur 79) der Punkt P mit einem Brennpunkt zusammenfällt, so erhält der Satz, dass AP, CP, Q_1P, Q_4P, vier harmonische Strahlen bilden, hier, da AP und CP senkrecht aufeinander stehen, die Form:

Verbindet man den Schnittpunkt A irgend zweier Tangenten und deren Berührungspunkte Q_1 und Q_3 mit einem Brennpunkt, so wird der Winkel der letzteren Verbindungslinien von der erstgenannten halbirt (siehe § 14).

Jede durch den Schnittpunkt zweier Tangenten gehende Gerade ist zur Berührungssehne polar. Im besonderen folgt daher: Die Verbindungslinie des Schnittpunkts zweier Tangenten mit der Mitte der Berührungssehne geht durch den Mittelpunkt der Kurve. (Für die Parabel ist sie also parallel zur grossen Achse; ausserdem wird sie von der Parabel halbirt, da der zweite Schnittpunkt, der zugleich vierter harmonischer Punkt sein muss, unendlich fern liegt.)

Irgend eine Sekante parallel zur Berührungssehne hat mit dieser denselben conjugirten Durchmesser gemeinsam. Die Mitte der von der Kurve abgeschnittenen Sehne liegt also auf dem genannten Durchmesser. Da derselbe aber durch den Schnittpunkt der Tangenten geht, so ist jene Mitte zugleich Mitte des von den Tangenten abgeschnittenen Stückes der Sekante, d. h. die beiden Stücke einer zur Berührungssehne parallelen Sekante zwischen der Kurve und den beiden Tangenten sind einander gleich. Ist im besonderen die Berührungs-

sehne unendlich fern, so kann jede Gerade als zu ihr parallel angesehen werden und so finden wir den Satz wieder, dass die Stücke irgend einer Sekante einer Hyperbel zwischen dieser und den Asymptoten einander gleich werden. (Seite 187.)

Diese Beispiele, die sich noch ausserordentlich vermehren liessen, beweisen die Vielseitigkeit der Theorie von Pol und Polare, einer Theorie, die oft scheinbar ganz verschiedene Sätze auf dieselbe Grundlage stellt und sie als „besondere Fälle“ mit grösster Leichtigkeit erkennen lässt.

Betrachten wir endlich noch diese Theorie für die einfachste Kurve zweiter Ordnung, für den Kreis. Hier ist augenscheinlich die Polare l eines Punktes P senkrecht auf dem Durchmesser durch P. Bezeichnet man mit $\varDelta$ den Abstand des Punktes, mit $\varDelta_1$ den Abstand seiner Polare l vom Mittelpunkt, so giebt die Bedingung der harmonischen Lage von P und dem Fusspunkt von $\varDelta_1$ zu den Endpunkten des Durchmessers die Gleichung:

$$\varDelta \cdot \varDelta_1 = r^2,$$

welche stets eine sehr einfache Construktion der Polare ermöglicht. Nimmt man die Mittelpunktsgleichung

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

so werden die Koordinaten u und v der Polare l, wenn die des Poles P mit x und y bezeichnet werden, nach 3):

$$u = -\frac{x}{r^2},\ v = -\frac{y}{r^2},\ \text{daher:}$$

$$p = +\frac{r^2}{x},\ q = +\frac{r^2}{y},$$

und der Richtungscoefficient m der Polaren:

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\frac{y}{x}},$$

die Polare steht daher senkrecht auf dem durch P gehenden Durchmesser.

Wie bereits bemerkt, kann die polare Verwandtschaft auch auf eine imaginäre Kurve zweiter Ordnung gegründet werden, z. B. auch auf den imaginären Kreis:

$$x^2 + y^2 + r^2 = 0,$$

hier wird dann:

$$\varDelta \cdot \varDelta_1 = -r^2,$$

d. h. der Punkt P und seine Polare l sind durch den Mittelpunkt M getrennt. Merkwürdigerweise giebt es gerade für diesen Fall folgende ausgezeichnete Deutung der Polarität, die von Gauss gelegentlich[1]) gegeben wurde. Man errichte in M auf der Ebene ein Lot $= r$ und drehe um den Endpunkt M' irgend eine Ebene, während zugleich das in M' auf ihr errichtete Lot sich mitdreht. Dann schneide man Ebene und Lot durch die Grundebene in einer Geraden l und einem Punkt P und ordne nun l und P polar einander zu.

Im allgemeinen entspricht durch die polare Verwandtschaft einer geometrischen Figur wieder eine geometrische Figur, jedoch derart, dass den Punkten der einen gerade Linien der andere und umgekehrt zugehören. Handelt es sich um eine Kurve n^{ter} Ordnung, so wird sie in einer Kurve n^{ter} Klasse abgebildet, handelt es sich um ein n-Eck, so ist das Abbild wieder ein n-Eck, dessen Seiten den Ecken, dessen Ecken den Seiten des ersteren entsprechen. Gesetzt z. B. das Rechteck $ABCD$

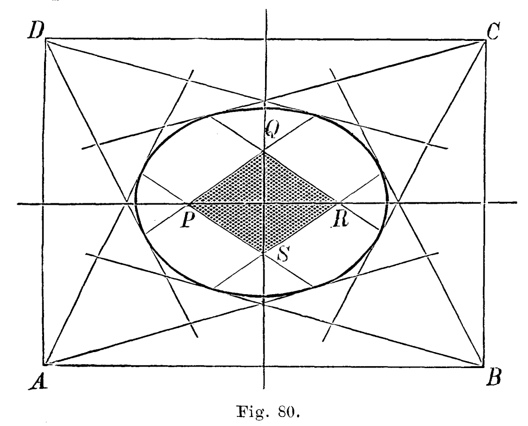


Fig. 80.

(Fig. 80) soll in Bezug auf den gezeichneten Kegelschnitt polar abgebildet werden, so construire man zu den Ecken A, B, C, D die Polaren. Diese hüllen ein Rhombus $PQRS$ ein, welches die Polarfigur des Rechtecks ist. Lässt man einen Punkt von A nach B wandern, so dreht sich die Polare um S so, dass sie die Nebenwinkelräume des Winkels PSR überstreicht. Und umgekehrt, wird durch einen beweglichen Punkt eine

[1]) In einer Abhandlung über das Pentagramma mirificum.

Seite des Rhombus, z. B. PQ beschrieben, so dreht sich die Polare um die Ecke D und überstreicht auch die Nebenwinkelräume des Winkels D etc.[1])

Aufgaben.

1. Gegeben ein Kegelschnitt und ein beliebiges, nicht sich selbst polares Dreieck ABC. Zu beweisen, dass es mit dem ihm polaren Dreieck $A_1B_1C_1$ (A Pol von B_1C_1 etc.) perspektivisch liegt und dass die aus den 10 Linien und 10 Punkten bestehende, sich auf diese Lage beziehende Figur des § 10 sich in Bezug auf den Kegelschnitt selbst polar ist.

2. Auf Grund der Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte soll eine einfache geometrische Konstruktion der beiden durch einen gegebenen Punkt gehenden conjugirten Polaren ermittelt werden, welche auf einander senkrecht stehen.

3. Die aus 10 Linien und 10 Punkten bestehende Figur von 1) ist in 2 Fünfecke zu spalten, von denen jedes sich selbst polar ist. Nachzuweisen, dass diese Spaltung auf 6 verschiedene Arten möglich ist.

---

§ 23.

Erzeugung der Kegelschnitte durch projektivische Strahlenbüschel und durch projektivische Punktreihen.

Einer der ersten Sätze der Elementargeometrie sagt aus, dass Peripheriewinkel über demselben Bogen eines Kreises

---

[1]) Anmerkung: Die hier gezeichnete Figur ist einer praktischen Aufgabe aus der Elasticitätstheorie entnommen. Gesetzt, es sei $ABCD$ der Querschnitt eines Steinpfeilers und die gezeichnete Ellipse sei die „Trägheitsellipse“ dieses Querschnittes. Wenn auf den Pfeiler ein senkrechter Druck wirkt, dessen Angriffspunkt nicht genau in der Mitte liegt, so wird der Querschnitt nicht gleichmässig beansprucht und es kann sogar kommen, dass auf der dem Angriffspunkt mehr abgewandten Seite Spannungen eintreten. Stein soll aber bei seiner Verwendung als Baumaterial nur Druck, niemals Spannungen ausgesetzt sein und die Theorie sagt, dass letztere vermieden werden, wenn der Angriffspunkt noch innerhalb des „Kernes“ liegt. Dieser Kern ist aber die Polarfigur des Querschnittes (gleichgiltig, ob letztere ein Rechteck ist, wie hier, oder eine andere Form hat), wenn diese Polarfigur um den Mittelpunkt noch um 180° gedreht wird, was in unserem Falle allerdings der Symmetrie wegen nicht nöthig ist.

einander gleich sind. Aber nicht ganz so allgemein bekannt ist die daraus fliessende Folgerung, dass der Kreis als das Erzeugniss zweier kongruenter Strahlenbüschel anzusehen ist.

Man denke sich zwei feste Punkte S und S_1 (Fig. 81) des Kreises mit beliebig vielen Punkten P_1, P_2, P_3 desselben, die zunächst auf demselben Bogen zwischen S und S_1 liegen mögen, verbunden. Dann ist

$$\sphericalangle P_1SP_2 = \sphericalangle P_1S_1P_2,$$
$$\sphericalangle P_1SP_3 = \sphericalangle P_1S_1P_3$$

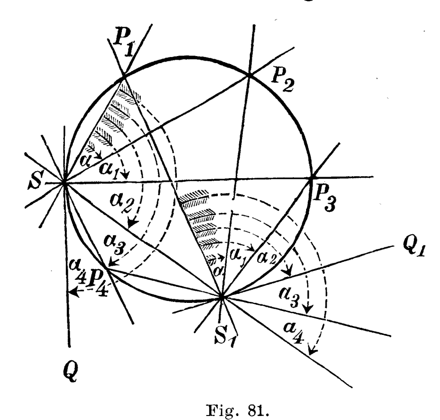


Fig. 81.

etc., wobei aber ausserdem zu beachten ist, dass der Drehungssinn je zwei solcher Winkel übereinstimmt. Mit anderen Worten: das Strahlenbüschel SP_1, SP_2, SP_3 etc. ist dem Strahlenbüschel S_1P_1, S_1P_2, S_1P_3 etc. kongruent. Aber die Kongruenz pflanzt sich auch auf den andern Kreisbogen fort. Nimmt man nämlich auf diesem einen Punkt P_4 an, so sind nun zwar nicht mehr die beiden Winkel $\sphericalangle P_1SP_4$ und $\sphericalangle P_1S_1P_4$ einander gleich, wohl aber ist der eine gleich dem Nebenwinkel des andern. Bedenkt man nun ferner, dass der Winkel $P_1SS_1 =$ dem Abschnittswinkel $P_1S_1Q_1$ und ebenso der Winkel $P_1SQ =$ dem Nebenwinkel von P_1S_1S ist, so sieht man in der That, dass die beiden Strahlenbüschel S und S_1 durch den Kreis kongruent auf einander bezogen sind, wenn stets die beiden durch denselben Punkt des Kreises gehenden Strahlen einander zugeordnet werden und zugleich festgesetzt wird, dass dem gemeinsamen Strahl SS_1 die Tangente in S oder in S_1 entsprechen soll, je nachdem dieser Strahl zum Büschel S_1 oder zum Büschel S gerechnet wird. Daher der Satz:

Ein Kreis wird von irgend zwei seiner Punkte aus durch kongruente Strahlenbüschel (mit gleichem Drehungssinn) projicirt.

Aber auch umgekehrt:

Zwei kongruente Strahlenbüschel (mit gleichem Drehungssinn), deren Centren nicht zusammenfallen, erzeugen einen

Kreis, wenn jeder Strahl mit dem entsprechenden Strahl zum Schnitt gebracht wird.

Dieser Satz hat eine Ausnahme. Wenn das eine Strahlenbüschel aus dem andern durch blosse Parallelverschiebung, ohne Drehung entstanden ist, so sind entsprechende Strahlen parallel und ihr Schnitt liegt unendlich fern, während der gemeinsame Strahl „sich selbst" entspricht. Die erzeugte Kurve zerfällt also in die unendlich ferne Gerade und den gemeinsamen Strahl, welcher ja auch als Kreis mit unendlich grossem Radius genommen werden kann. Liegen aber die Centren in einander, so fallen entweder die kongruenten Büschel ganz zusammen, sie decken sich, oder das eine ist aus dem andern durch Drehung entstanden. Dann haben sie aber immer noch die Nulllinien gemeinsam (§ 2) und der Kreis schrumpft in einen Punkt ein.

Kongruente Strahlenbüschel sind ein besonderer Fall projektivischer Strahlenbüschel. Was erzeugen wohl diese?

Der grossen Bedeutung dieser Frage wollen wir dadurch gerecht werden, dass wir sie auf zwei Wegen, einmal rein analytisch, das andere mal geometrisch in Angriff nehmen.

Zu Grunde werde irgend ein Koordinatensystem gelegt. Es seien S das Centrum des einen Büschels und

$$U \equiv a_1x + b_1y + c_1z = 0$$
$$V \equiv a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

irgend zwei durch S hindurchgehende Gerade, so dass die Gleichung

$$U + \lambda V = 0$$

das erste Strahlenbüschel analytisch darstellt. Ebenso sei S_1 das Centrum des zweiten Büschel,

$$U_1 \equiv a_3x + b_3y + c_3z = 0$$
$$V_1 \equiv a_4x + b_4y + c_4z = 0$$

irgend zwei seiner Strahlen und daher:

$$U_1 + \mu V_1 = 0$$

die Gleichung des zweiten Strahlenbüschels. Da nach 3) § 10 bezw. § 21 S. 261 das Doppelverhältniss zwischen vier Strahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des ersten Büschels durch den Bruch $\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3)}$ dargestellt wird und entsprechendes für vier Strahlen des

anderen Strahlenbüschels gilt, so folgt nach § 1, dass die Strahlenbüschel nur dann projektivisch auf einander bezogen werden, wenn zwischen λ und μ eine Gleichung von der Form

$$\mu = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$$

angesetzt wird.

Man kann aber stets so verfahren, dass diese Gleichung sich in $\mu = \lambda$ vereinfacht. Denn setzt man statt μ den Bruch $\frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$ in die Gleichung des zweiten Strahlenbüschels ein, so folgt nach Multiplication mit $c\lambda + d$:

$$(c\lambda + d)\, U_1 + (a\lambda + b)\, V_1 = 0$$

oder:

$$(dU_1 + b V_1) + \lambda(cU_1 + a V_1) = 0.$$

Setzt man nunmehr U_1 statt $dU_1 + b V_1$, V_1 statt $cU_1 + a V_1$, so dass nachher $U_1 = 0$, $V_1 = 0$ auch zwei Strahlen des Strahlenbüschels sind, aber diejenigen, welche $U = 0$ und $V = 0$ entsprechen, so erhellt, dass man, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, zwei projektivische Strahlenbüschel stets durch:

$$U + \lambda V = 0, \quad U_1 + \lambda V_1 = 0, \qquad \textbf{1)}$$

darstellen kann, so dass zugleich je zwei demselben Werth von λ entsprechende Strahlen einander zugehören. Dabei sind U, V, U_1, V_1 irgend vier lineare Ausdrücke:

$$U \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z, \quad U_1 \equiv a_3 x + b_3 y + c_3 z$$
$$V \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z, \quad V_1 \equiv a_4 x + b_4 y + c_4 z.$$

Nun wird verlangt, dass jeder Strahl von S mit dem entsprechenden von S_1 zum Schnitt gebracht werde. Der betreffende Schnittpunkt genügt also beiden Gleichungen 1) und die Gleichung seines geometrischen Ortes entsteht daher sofort durch Elimination von λ. Man erhält auf der Stelle:

$$UV_1 - VU_1 = 0, \text{ oder: } \begin{vmatrix} U, & U_1 \\ V, & V_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \textbf{2)}$$

also eine Endgleichung zweiten Grades, d. h.:

Zwei projektivische Strahlenbüschel erzeugen stets einen Kegelschnitt.

Anmerkung: Liegen die beiden projektivischen Strahlenbüschel sogar perspektivisch, so erleidet dieser Satz nur scheinbar eine Ausnahme, denn wenn auch hier Schnittpunkte

entsprechender Strahlen auf einer Geraden, der Achse der Perspektivität liegen, so entspricht in diesem Falle doch der gemeinsame Strahl SS_1 sich selbst, so dass man den Schnittpunkt auf diesem Doppelstrahl annehmen kann, wo man will: d. h. der Kegelschnitt zerfällt hier in zwei Gerade, nämlich die Achse der Perspektivität und den gemeinsamen Strahl.

Dass auch im allgemeinen Falle S und S_1 auf dem erzeugten Kegelschnitt liegen, folgt einerseits analytisch, da die Gleichung 2) erfüllt wird für $U = 0$, $V = 0$ (Punkt S) und auch für $U_1 = 0$, $V_1 = 0$ (Punkt S_1), andererseits auch geometrisch, indem man den gemeinsamen Strahl einmal zu S, das andere Mal zu S_1 rechnet, worauf die entsprechenden Strahlen zu Tangenten in S_1, beziehungsweise in S werden.

Geometrisch kann die Natur des Erzeugnisses projektivischer Strahlenbüschel folgendermassen erkannt werden. Es seien bei veränderter Bezeichung (Fig. 82) B und E die beiden Centren und A, D, C irgend drei andere Punkte der erzeugten Kurve. Man verbinde A mit C und mit D und beziehe B perspektivisch auf die erste, E perspektivisch auf die zweite dieser Geraden. Dann sind letztere nicht allein projektivisch, sondern auch perspektivisch (da der gemeinsame Punkt A sich selbst entspricht), und das Centrum S dieser Prospektivität ist der Schnitt von a und b. Die Strahlenbüschel B und E sind somit beide auf S perspektivisch bezogen. (Vergleiche § 3 Seite 37.) Wird nun durch S irgend eine Gerade gelegt, und nennt man T und U ihre Schnittpunkte mit AC und AD, so sind BT und EU zwei entsprechende Strahlen, und ihr Schnitt F ist ein neuer (sechster) Punkt der Kurve.

Nun sehe man den Linienzug A, C, E, F, B, D als ein Sechseck an, dann sind S, T, U die drei Durchschnitte der Gegenseiten, und da sie auf einer geraden Linie liegen, so ist dieses Sechseck ein Pascal'sches, d. h. durch die sechs Punkte A, B, C, D, E, F geht ein Kegelschnitt. q. e. d.

Würde man umgekehrt von vornherein den Pascal'schen Satz [1]) als Ausgangspunkt genommen haben, so hätte man in dem Pascal'schen Sechseck nur fünf Ecken als fest, die sechste

[1]) Dies ist die andere Bedeutung des Pascal'schen Satzes, von der im § 19 zum Schluss die Rede war.

als veränderlich setzen brauchen, um sofort zur projektivischen Erzeugung der Kegelschnitte zu gelangen. Daher haben wir auch umgekehrt:

Ein gegebener Kegelschnitt wird von irgend zwei seiner Punkte aus durch projektivische Strahlenbüschel projicirt.

Ersetzt man in den bisherigen Betrachtungen gerade Linien durch Punkte, Punkte durch gerade Linien und wählt statt des Pascal'schen den Brianchon'schen Satz, so wird der Beweis geliefert, dass zwei projektivische (aber nicht perspektivisch liegende) Punktreihen auch einen Kegelschnitt erzeugen, wenn zugeordnete Punkte mit einander verbunden werden. Alle diese Verbindungslinien sind Tangenten des Kegelschnittes, zu welchen auch die Träger der beiden Punktreihen gehören. Letztere berühren ihn in den Punkten, die ihrem Schnittpunkte entsprechen, wenn dieser zu der ersten und dann zur zweiten Punktreihe gezählt wird. Auch werden umgekehrt alle Tangenten eines Kegelschnittes durch irgend zwei derselben in projektivischen Punktreihen geschnitten, und wie der Pascal'sche Satz nichts anderes ist, als der getreue Ausdruck der Erzeugung durch projektivische Strahlenbüschel, wenn von den sechs Ecken die eine auf den Kegelschnitt läuft, so birgt der Brianchon'sche Satz die Theorie der Erzeugung durch projektive Punktreihen.

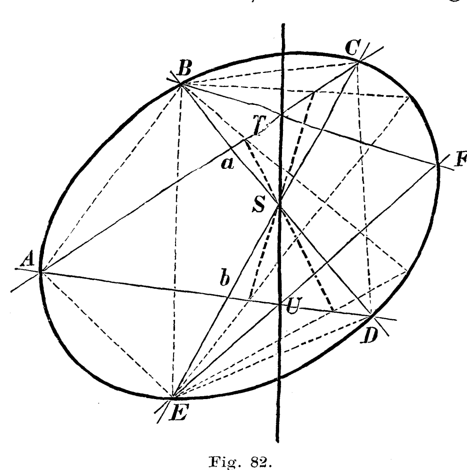


Fig. 82.

Diese Theorien sind für die Geometrie deswegen von so hoher Bedeutung, weil durch sie die Kegelschnitte, also die Gebilde zweiter Stufe mittelst des Begriffes der Projektivität auf solche erster Stufe zurückgeführt werden, als deren einfaches und natürliches Produkt sie erscheinen. Man setzt dann Punktreihe und Strahlenbüschel als Grundelemente, als

Bausteine für die Höherführung der geometrischen Gebilde und es ist wohl klar, dass man dabei mit den Kegelschnitten nicht abzuschliessen braucht. Denn nachdem diese so als Erzeugnisse von Punktreihen und Strahlenbüscheln eingeführt werden, kann man auch sie zu Büscheln verknüpfen, was analytisch dadurch zum Ausdruck kommt, dass in 1) für U und V Funktionen 2ten Grades gesetzt werden.

Indem nun der Begriff Projektivität auch auf diese Büschel ausgedehnt wird, lassen sich durch Verbindung von Kegelschnittbüscheln mit projektivischen Strahlenbüscheln oder auch von Kegelschnittbüscheln untereinander abermals Gebilde höherer Stufe erzeugen, die, analytisch betrachtet, Kurven dritter oder vierter Ordnung sind. So aufgefasst, ist die Projektivität derjenige Begriff, welcher einen organischen Aufbau der Geometrie überhaupt erst ermöglicht. Dies mag um so nachdrücklicher betont werden, als wir hier mit den Kurven zweiter Ordnung abschliessen müssen.

Eine geradlinige Punktreihe wird von allen Punkten durch projektivische Strahlenbüschel aufgenommen; eine auf einem Kegelschnitt liegende Punktreihe zwar nicht von allen Punkten überhaupt, aber doch immer noch von allen Punkten dieses Kegelschnittes selbst, wobei nochmals zu bemerken ist, dass der Strahl zur Tangente wird, wenn der zu projicirende Punkt mit dem Centrum zusammenfällt. Daher spricht man von dem Doppelverhältniss von irgend vier Punkten eines Kegelschnittes und versteht darunter das Doppelverhältniss von vier Strahlen, durch welche diese vier Punkte von einem beliebigen fünften Punkte des Kegelschnittes projicirt werden.[1]

Besonders wichtig aber ist die harmonische Lage von vier solchen Punkten. So z. B. liegen die vier Scheitel einer Ellipse, oder allgemeiner die Endpunkte conjugirter Durchmesser harmonisch. Ganz allgemein aber gilt der Satz, dass die Schnittpunkte conjugirter Polaren mit dem Kegelschnitt harmonische Punkte sind (z. B. CC_1 und DE in Fig. 84).

[1]) An und für sich haben daher vier beliebige Punkte der Ebene gar kein Doppelverhältniss, sondern nur in Bezug auf irgend einen, durch sie hindurchgehenden Kegelschnitt.

Denn die Tangenten in D und E schneiden sich in dem Pol S, der wieder auf der andern Polaren CC_1 liegt, woraus sofort folgt, dass S, C, C_1 und der Schnittpunkt der Polaren vier harmonische Punkte bilden, womit der Beweis geliefert ist, wenn man von D oder E projicirt. Dass auch umgekehrt die beiden Verbindungslinien der zugeordneten Punktpaare bei vier harmonischen Punkten conjugirte Polaren sein müssen, lehrt die Umkehrung dieses Beweises.

Wie vom Doppelverhältniss zwischen vier Punkten, so spricht man auch von dem Doppelverhältniss zwischen vier Tangenten eines Kegelschnittes und die Theorie von Pol und Polare lehrt unmittelbar, dass das letztere Doppelverhältniss mit demjenigen der vier Berührungspunkte übereinstimmt.

Die projektivische Erzeugung deckt mit überraschender Leichtigkeit eine Fülle von Eigenschaften der Kegelschnitte auf, die sonst auf anderem Wege als selbstständige Sätze gewonnen werden, hier aber als besondere Fälle der Projektivität zu betrachten sind. Um dies an einigen Beispielen nachzuweisen, werde angenommen, dass irgend ein Kegelschnitt von zwei seiner Punkte durch Strahlenbüschel projicirt und dann beide Strahlenbüschel durch ein und dieselbe Gerade geschnitten werden. Dann befinden sich auf dieser zwei ineinanderliegende projektive Punktreihen, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt sind. Wird die Gerade parallel zu einer Asymptote, so ist der eine Doppelpunkt unendlich fern, die Projektivität wird zur Aehnlichkeit, fällt aber die Gerade mit der Asymptote selbst zusammen, so liegen beide Doppelpunkte unendlich fern, die Projektivität wird zur Kongruenz. Also:

Verbindet man zwei feste Punkte einer Hyperbel mit irgend einem dritten Punkt derselben, so ist die Länge des durch beide Strahlen von einer Asymptote abgeschnittenen Stückes von der Lage dieses dritten Punktes ganz unabhängig.

Wenn umgekehrt eine Strecke von unveränderlicher Länge auf einer Geraden verschoben und ihre Endpunkte mit zwei festen Punkten verbunden werden, so beschreibt der Schnittpunkt eine Hyperbel. Lässt man endlich einen der beiden festen Punkte unendlich fern liegen, ist da nicht sofort die Aufgabe des Cartesius gelöst? (Vergleiche § 7.)

Weiter mögen die beiden projektivischen Punktreihen, welche die Tangenten eines Kegelschnittes auf irgend zwei festen Tangenten ausschneiden, von irgend einem Punkte aus durch projektivische ineinander liegende Strahlenbüschel aufgenommen werden. Dann fallen die gemeinsamen Strahlen mit den Tangenten von diesem Punkt an dem Kegelschnitt zusammen. Wählt man als Centrum einen Brennpunkt, so sind die Tangenten Nulllinien und die Projektivität der ineinander liegenden Strahlenbüschel verwandelt sich (§ 3) in Kongruenz, d. h. das eine Strahlenbüschel entsteht aus dem anderen durch Drehung. Daher:

Der Winkel, durch welchen das Stück einer beweglichen Tangente zwischen zwei festen Tangenten eines Kegelschnittes von einem Brennpunkt aus projicirt wird, ist von der Lage der beweglichen Tangente ganz unabhängig. (Selbstverständlich ist je nach der Lage bei Vergleichung zwei solcher Winkel auch der Nebenwinkel zu setzen.)

Fällt die bewegliche Tangente mit einer der festen zusammen, so ist als Schnittpunkt mit dieser der Berührungspunkt zu nehmen, so dass aus dem vorigen Satz wieder die Folgerung fliesst, dass die Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Schnittpunkt zweier Tangenten den Winkel der Brennstrahlen nach den Berührungspunkten halbirt. (Siehe § 14.)

Ist der Kegelschnitt eine Parabel, so beachte man, dass die unendlich ferne Gerade auch Tangente ist, woraus hervorgeht, dass für die Parabel der vorhin genannte unveränderliche Winkel gleich dem Winkel der festen Tangenten, beziehungsweise dessen Nebenwinkel ist, woraus übrigens wieder der Satz folgt, dass der umbeschriebene Kreis eines Dreiecks, dessen Seiten Tangenten der Parabel sind, durch den Brennpunkt hindurchgeht. (Siehe § 16.)

Uebrigens verhält sich die Parabel hinsichtlich ihrer Tangenten ähnlich wie der Kreis hinsichtlich seiner Punkte. Wie der Kreis nämlich von zwei seiner Punkte aus durch kongruente Strahlenbüschel projicirt wird, so werden die Tangenten der Parabel von zwei festen Tangenten zwar im allgemeinen nicht in kongruenten, wohl aber in ähnlichen Punktreihen geschnitten (da die beiden unendlich fernen Punkte sich als Schnittpunkte der unendlich fernen Tangente

einander entsprechen). Das Aehnlichkeitsverhältniss stimmt offenbar mit dem Verhältniss der Längen der Tangenten, von ihrem Schnittpunkt zum Berührungspunkt gerechnet, überein. Daher wird die Aehnlichkeit zur Kongruenz, wenn sich die beiden Tangenten in einem Punkt der Hauptachse schneiden.

So entsteht die bekannte und vielfach angewendete Tangentenconstruktion der Parabel, von der zwei Tangenten und ihre Berührungspunkte gegeben sind. (Fig. 83.) Der Berührungspunkt Q' irgend einer so gefundenen dritten Tangente P_1P_2 wird gefunden, indem man durch P_1 und P_2 die Parallelen zu den gegebenen Tangenten zieht, die die Berührungssehne in einem Punkt A schneiden und dann durch A die Parallele zur Mittellinie PB nimmt. (Beweis aus den Sätzen über das ein- und umbeschriebene Viereck, indem noch die unendlich ferne Gerade als vierte Tangente hinzugenommen wird.)

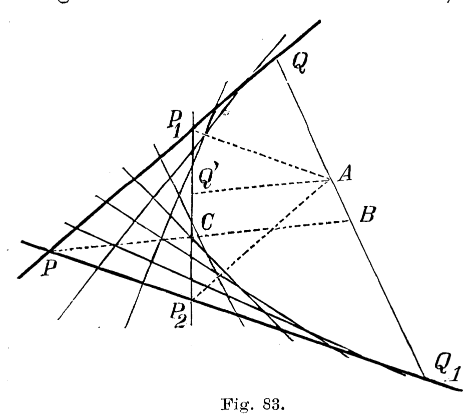


Fig. 83.

Diese Beispiele für die Anwendung der projektivischen Eigenschaften der Kegelschnitte zur Konstruktion oder zur direkten Herleitung von geometrischen Sätzen liessen sich ausserordentlich vermehren.

Der grösste Nutzen aber besteht doch in der rein linearen, d. h. ohne Gebrauch des Zirkels möglichen Auffindung von so viel Punkten und Tangenten der Kurve, wie man nur haben will, und auch ohne dass man Mittelpunkt, Achsen, Excentricität zu bestimmen genöthigt ist. Sind z. B. fünf Punkte der Kurve A, B, C, D, E gegeben, so giebt die Figur 82 die Construktion irgend eines sechsten Punktes F wieder, wobei man überdies den Vortheil hat, mit den fünf gegebenen Punkten beliebig wechseln zu können, wenn etwa aufzusuchende Punkte oder Linien nicht mehr auf das Papier hinaufkommen. Liegen z. B. die fünf Punkte A, B, C, D, E

auf einer Ellipse, so sieht man an Figur 82 sofort, dass man beim Uebergang von einem Bogen z. B. DC zum nächsten die Anordnung der fünf Punkte nur um einen Schritt cyklisch zu ändern hat, damit die Zeichnung ganz in der Ellipse bleibt.

Daneben behält aber die früher abgehandelte, rein analytische, im gegebenen Falle also rechnerische Transformation auf den Mittelpunkt und auf die Hauptachsen nach § 17 und § 18 ihren vollen Werth. Denn erstens sind Mittelpunkt und Hauptachsen nicht durch lineare Construktionen erreichbar, erfordern vielmehr, wo man geometrisch zu Werke gehen will, durchaus den Gebrauch des Zirkels; dann aber giebt die Rechnung, wenn mit genügender Stellenzahl durchgeführt, praktisch fehlerlose Resultate, während bei etwas verwickelteren Konstruktionen selbst bei grösster Sorgfalt die Zeichenfehler erheblichen Einfluss gewinnen. Ausserdem führt auch umgekehrt die Rechnung häufig schneller zum Ziele, wenn sie kurz und einfach ist.

Die Einführung des Doppelverhältnisses von vier Punkten eines Kegelschnittes ermöglicht sofort die Uebertragung des Projektivitätsbegriffes auf diese Kurven, indem man sagt, dass zwei Kegelschnitte dann projektivisch auf einander bezogen seien, wenn jedem Punkt oder Tangente des einen Kegelschnittes ein Punkt (oder eine Tangente) des anderen so zugeordnet wird, dass entsprechende Doppelverhältnisse einander gleich werden, und es liegt auf der Hand, dass in gleicher Weise auch Kegelschnitte und Punktreihen oder Strahlenbüschel projektivisch sein können. Diese Erweiterung der Projektivität auf Gebilde zweiten Grades giebt zu neuen Fragen und Untersuchungen Anlass, den die Geometer nicht bei Seite gelassen haben. Was für ein geometrisches Gebilde entsteht z. B., wenn nun entsprechende Punkte verbunden oder entsprechende Tangenten zum Schnitt gebracht werden?

Da diese Gebilde aber im allgemeinen Kurven höherer Ordnung und Klasse sind, so wollen wir uns auf den besonderen Fall beschränken, dass die beiden projektiven Kegelschnitte ineinander liegen, oder dass ein Kegelschnitt auf sich selbst projektivisch bezogen ist, und jeder Punkt einem andern Punkt entspricht. Dann sind zwei Fälle abzuhandeln.

1. Die Projektivität sei involutorisch. Es seien AA_1 und BB_1 zwei zugehörige Punktepaare, so suche man (Figur 84)

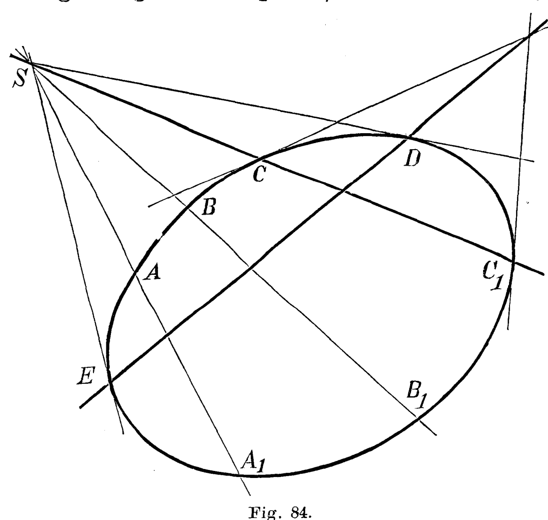


Fig. 84.

den Schnitt S von AA_1 und BB_1 auf. Wird dann durch S ein beliebiger Strahl gezogen, der den Kegelschnitt in C und C_1 schneidet, so sind C und C_1 durch die Involution einander zugeordnet.

Beweis: Man verbinde A mit C_1 und C mit A_1. Der Schnittpunkt γ (nicht gezeichnet) liegt nach § 21 auf der Polaren ED von S. C und C_1 beschreiben daher zu der Punktreihe γ perspektivische Punktreihen mit A und A_1 als Centren der Perspektivität. Also sind C und C_1 zunächst projektivisch aufeinander bezogen. Da man aber weiter C mit C_1 vertauschen kann, so ist die Projektivität involutorisch. q. e. d.

Die Schnittpunkte D und E der Polaren sind Doppelpunkte der Involution; zu ihnen liegt jedes Punktpaar, AA_1 oder BB_1 oder CC_1 harmonisch. Billigerweise wird man hier S das Centrum und DE die Achse der Involution nennen. Lässt man z. B. das Centrum mit dem Mittelpunkt zusammenfallen, so liegen entsprechende Punkte gegenüber, befindet es sich auf einer Hauptachse in unendlicher Entfernung, so wird aus der Involution Symmetrie zur anderen Hauptachse. Nimmt man allgemein drei Centren an, die ein Polardreieck des

Kegelschnitts bilden, so entsprechen einem Punkt des Kegelschnitts drei Punkte derart, dass diese vier Punkte symmetrisch zum Dreieck liegen.

2. Die Projektivität sei ganz willkürlich und es mögen den drei Punkten ABC irgend welche drei Punkte $A_1B_1C_1$ entsprechen. Man nehme (Fig. 85) die Punktreihe $ABC\ldots$

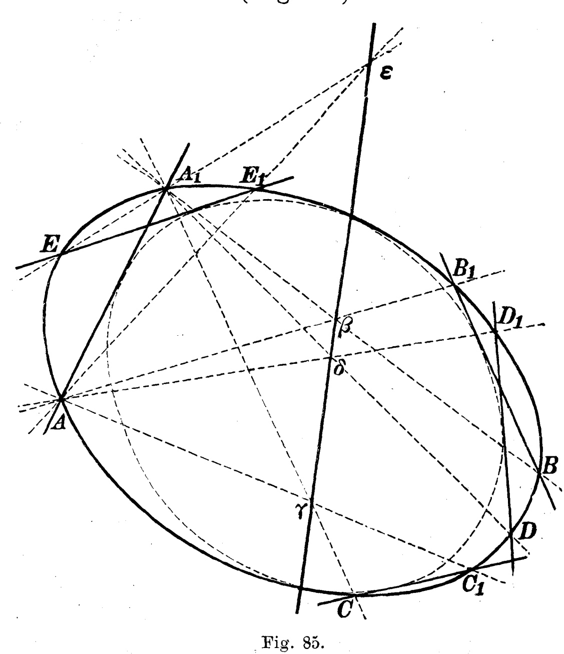


Fig. 85.

von A_1, die Punktreihe $A_1B_1C_1\ldots$ aber von A aus durch Strahlenbüschel auf. Da in diesen Strahlenbüscheln der Strahl AA_1 sich selbst entspricht, so müssen sie perspektivisch liegen. Die Achse dieser Perspektivität ist die Linie $\beta\gamma$. Ist daher zu irgend einem vierten Punkte D der Punktreihe ABC der zugehörige D_1 zu finden, so schneide man A_1D mit der Achse in δ und verbinde δ mit A, welcher Strahl den Kegelschnitt in D_1 trifft.

Sieht man das Sechseck $AB_1CA_1BC_1$ als ein Pascal'sches Sechseck an, so sind β und γ zwei Schnittpunkte von Gegenseiten. Der Schnittpunkt von BC_1 mit CB_1 (nicht gezeichnet) muss daher auch auf der Achse liegen. Daher:

Sind zwei projektive Punktreihen in demselben Kegel-

schnitt gegeben und wählt man ganz beliebig zwei Punktpaare wie AA_1 und BB_1 aus, verbindet dann „über Kreuz“ A mit B_1 und B_1 mit A, so liegt der Schnittpunkt stets auf ein und derselben Linie, der „Achse“ der Projektivität.

Dagegen giebt es im Allgemeinen kein „Centrum“ dieser Projektivität. Denn wenn man entsprechende Punkte wie A und A_1, B und B_1, C und C_1 mit einander verbindet, so schneiden sich diese Linien nicht in einem Punkt, sondern umhüllen eine Kurve. Aber was für eine?

Zur Beantwortung dieser Frage schneide man zwei dieser Geraden, etwa AA_1 und BB_1 in Q (nicht gezeichnet). Dann ist Q harmonischer Pol zu β. Wird daher AA_1 festgehalten, während β auf der Achse läuft, so beschreibt Q auf AA_1 eine zu β projektive Punktreihe. Andererseits ist β projektivisch zu den beiden Punktreihen im Kegelschnitt. Daher wird jede Verbindungslinie wie AA_1 von allen anderen in projektiven Punktreihen geschnitten, folglich umhüllen die Geraden $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 \ldots$ einen Kegelschnitt (der aber nicht mit dem ursprünglichen zusammenfällt. In der Figur punktirt).

Wenn die Achse der Projektivität den gegebenen Kegelschnitt in zwei Punkten schneidet, so sind diese die Doppelpunkte der beiden vorgelegten Punktreihen, d. h. die Tangenten in ihnen sind zugleich Tangenten des erzeugten Kegelschnittes, die diesen in denselben Punkten berühren. Wir haben also zwei Kegelschnitte in doppelter Berührung vor uns. [Wird die Projektivität zur Involution, so zerfällt der erzeugte Kegelschnitt in die beiden Tangenten.]

Aufgaben.

1. Was für einen Kegelschnitt erzeugen zwei nicht congruente, sondern symmetrische Strahlenbüschel (congruente mit entgegengesetztem Drehungssinn)? Wie liegen die beiden Centren auf diesem Kegelschnitt?

2. Ohne Rechnung auf der Stelle nachzuweisen, dass die Aufgabe des Cartesius in § 7 auf einen Kegeschnitt führen muss.

3. Ist es möglich, irgend zwei fest gegebene Kegelschnitte so projektivisch aufeinander zu beziehen, dass die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen und denselben Punkt gehen (dass sie perspektivisch liegen)?

§ 24.

Rationale Parameterdarstellung der Kegelschnitte.

Wenn auch die Betrachtungen des vorigen Paragraphen wesentlich geometrisch waren, so besitzen sie doch eine streng analytische Deutung, die ihren Ausdruck in einer sehr einfachen Parameterdarstellung der Kegelschnitte findet.

Es seien wieder wie früher:

$$U + \lambda V = 0 \quad \text{und} \quad U_1 + \lambda V_1 = 0$$

oder:

$$\begin{aligned} x(a_1 + \lambda a_2) + y(b_1 + \lambda b_2) + z(c_1 + \lambda c_2) = 0 \\ x(a_3 + \lambda a_4) + y(b_3 + \lambda b_4) + z(c_3 + \lambda c_4) = 0. \end{aligned} \qquad 1)$$

die beiden Strahlenbüschel, welche den Kegelschnitt erzeugen. Jedem Werth von λ entspricht ein Punkt $P(x, y, z)$ des Kegelschnittes, dessen Koordinaten aus 1) nach den Formeln zu berechnen sind.[1])

$$x = \begin{vmatrix} b_1 + \lambda b_2, & c_1 + \lambda c_2 \\ b_3 + \lambda b_4, & c_3 + \lambda c_4 \end{vmatrix}, \quad y = - \begin{vmatrix} a_1 + \lambda a_2, & c_1 + \lambda c_2 \\ a_3 + \lambda a_4, & c_3 + \lambda c_4 \end{vmatrix},$$

$$z = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda a_2, & b_1 + \lambda b_2 \\ a_3 + \lambda a_4, & b_3 + \lambda b_4 \end{vmatrix}.$$

Die drei Determinanten werden aber entwickelt zu quadratischen Funktionen von λ, so dass x, y, z Ausdrücke von der Form werden:

$$\begin{aligned} x &= p_1\lambda^2 + q_1\lambda + r_1 \\ y &= p_2\lambda^2 + q_2\lambda + r_2 \\ z &= p_3\lambda^2 + q_3\lambda + r_3. \end{aligned} \qquad 2)$$

Damit ist die in der Ueberschrift bezeichnete Parameterdarstellung gewonnen. Sie ist rational, also auch eindeutig, sodass der blosse Anblick von 2) lehrt, dass in der That jedem λ nur ein Punkt $P(x, y, z)$ entspricht.

Da hier über das Koordinatensystem gar keine Voraussetzung gemacht worden ist, so kann auch ein rechtwinkliges gesetzt werden, worauf aus den homogenen Koordinaten die rechtwinkligen durch Substitution von x für $\frac{x}{z}$ und y für $\frac{y}{z}$ zu bilden sind. Daher:

Jeder Kegelschnitt kann in rechtwinkligen (oder auch schiefwinkligen) Koordinaten durch die Formeln:

---

[1]) Man beachte, dass es nur auf die Verhältnisse $x : y : z$ ankommt.

$$x = \frac{p_1\lambda^2 + q_1\lambda + r_1}{p_3\lambda^2 + q_3\lambda + r_3}, \quad y = \frac{p_2\lambda^2 + q_2\lambda + r_2}{p_3\lambda^2 + q_3\lambda + r_3} \qquad 2')$$

also vermittelst eines Parameters λ durch gebrochene Funktionen zweiten Grades mit gleichem Nenner dargestellt werden.

Anmerkung: Man kann die in 2) gegebenen Formeln auch „homogen“ machen, wenn statt λ ein Verhältniss $\frac{\alpha}{\beta}$ eingeführt und dann der Nenner β^2 weggelassen wird, worauf sich ergiebt:

$$\begin{aligned} x &= p_1\alpha^2 + q_1\alpha\beta + r_1\beta^2 \\ y &= p_2\alpha^2 + q_2\alpha\beta + r_2\beta^2 \\ z &= p_3\alpha^2 + q_3\alpha\beta + r_3\beta^2. \end{aligned} \qquad 2'')$$

Es bleibt noch nachzuweisen, dass die neun Coefficienten $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2, p_3, q_3, r_3$ keiner Beschränkung unterliegen, d. h. dass auch umgekehrt jede Gleichung von der Form 2) oder 2'') einen Kegelschnitt darstellt.

Allerdings darf die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_1, & q_1, & r_1 \\ p_2, & q_2, & r_2 \\ p_3, & q_3, & r_3 \end{vmatrix}$$

nicht $= 0$ sein. Bezeichnet man deren Unterdeterminanten mit P_1, Q_1, R_1 u. s. w., so dass $P_1 = q_2r_3 - r_2q_3$, $Q_1 = -p_2r_3 + r_2p_3$ etc., so folgt durch Auflösung von 1'') nach $\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2$:

$$\begin{aligned} \Delta \cdot \alpha^2 &= P_1x + P_2y + P_3z \\ \Delta \cdot \alpha\beta &= Q_1x + Q_2y + Q_3z \\ \Delta \cdot \beta^2 &= R_1x + R_3y + R_3z. \end{aligned}$$

Setzt man die drei linearen Ausdrücke rechts $= U_1, U_2, U_3$, so folgt hieraus:

$$\beta U_1 - \alpha U_2 = 0, \; \beta U_2 - \alpha U_3 = 0$$

oder:

$$U_1 - \lambda U_2 = 0, \; U_2 - \lambda U_3 = 0,$$

womit rückwärts wieder zwei projektive Strahlenbüschel gewonnen sind, die die durch 2) dargestellte Kurve erzeugen.

Anmerkung: Setzt man x, y, z als Funktionen ersten Grades eines Parameters λ an, also $x = p_1\lambda + q_1$, $y = p_2\lambda + q_2$, $z = p_3\lambda + q_3$, so wird eine gerade Linie oder eine Kurve erster Ordnung erhalten. Setzt man weiter x, y, z als Funktionen zweiten Grades, so wird, wie eben bewiesen worden, eine Kurve zweiter Ordnung dargestellt und zwar jede, wenn

über die Coefficienten beliebig verfügt wird. Daher liegt die Vermuthung nahe, dass man durch Aufschreiben von x, y, z als Funktionen dritten Grades jede Kurve dritter Ordnung, allgemein als Funktionen n^{ten} Grades jede Kurve n^{ter} Ordnung erhielte?

Diese Vermuthung erfährt scheinbar eine Bestätigung durch das in § 8 gegebene Beispiel des Kartesischen Blattes mit der Gleichung dritten Grades:

$$x^3 + y^3 - axy = 0$$

und der dort gefundenen Parameterdarstellung:

$$x = \frac{at}{1+t^3}, \; y = \frac{at^2}{1+t^3}.$$

Also x und y gebrochene Funktionen dritten Grades (dass der dritte Grad hier nur im Nenner $1 + t^3$ auftritt, ist nebensächlich). Auch die dort behandelte Conchoide kann zur Unterstützung dieser Vermuthung herangezogen werden, da auch für diese Kurve vierter Ordnung die Parameterdarstellung

$$x = \frac{[(l+d) + (l-d)t^2]}{1+t^2}, \; y = \frac{2t[(l+d) + (l-d)t^2]}{1-t^4}$$

aufgestellt wurde.

Nichtsdestoweniger erweist sie sich bei näherer Prüfung als falsch. Denn durch eine solche Parameterdarstellung wird zwar, wie leicht genug zu erweisen, eine Kurve n^{ter} Ordnung gewonnen, aber nicht umgekehrt lässt jede Kurve n^{ter} Ordnung, sobald $n > 2$, diese Parameterdarstellung zu. So ist es z. B. unmöglich, die Kurve

$$x^3 + y^3 - 5xy - 7 = 0,$$

deren Gleichung sich von der des Cartesischen Blattes nur durch Hinzufügung der Constanten — 7 unterscheidet, in die Form:

$$x = \frac{a_1 + b_1 t + c_1 t^2 + d_1 t^3}{a_3 + b_3 t + c_3 t^2 + d_3 t^3}, \; y = \frac{a_2 + b_2 t + c_2 t^2 + d_2 t^3}{a_3 + b_3 t + c_3 t^2 + d_3 t^3}$$

zu bringen, man mag über die zwölf Coefficienten a_1, $b_1 \ldots$ verfügen, wie man will.

Zweck dieser Anmerkung war hauptsächlich, darauf hinzuweisen, dass man bei scheinbar augenfälligen, aber unvollständigen Induktionen häufig sehr vorsichtig sein muss, dann aber, um hier wieder einmal einen höheren Gesichtspunkt an-

zudeuten, der übrigens sehr grosse Bedeutung für die höchsten Spitzen der Mathematik gehabt hat.

Kehren wir aber zu unseren Gleichungen 2) zurück. Es erscheint zunächst auffallend, dass in ihnen neun willkürliche Coefficienten enthalten sind, während die allgemeine Gleichung zweiten Grades nur sechs besitzt. Man bedenke aber, dass an Stelle von λ irgend eine gebrochene Funktion ersten Grades, eine andere Grösse μ vermittelst einer Gleichung

$$\lambda = \frac{a + b\mu}{c + d\mu}$$

in 2) eingesetzt werden kann, worauf x, y, z nach Fortlassung des Nenners quadratische Funktionen von μ werden müssen, und dass man daher durch geeignete Wahl von $a:b:c:d$ die Coefficienten $p_1, q_1 \ldots$ erheblich umzuformen im Stande ist.

Daher: Es giebt für denselben Kegelschnitt unzählig viele Darstellungen von der Form 2), die aber alle aus einer einzigen durch lineare Transformation des Parameters hervorgehen.

Die einfachste Parameterdarstellung gestattet ein Kegelschnitt, wenn er auf zwei Tangenten und die Berührungssehne bezogen wird. Dann ist seine Gleichung (§ 21, Seite 264) von der Form:

$$xy - kz^2 = 0$$

und sie wird sofort erfüllt, wenn gesetzt wird:

$$x = 1, \; y = k\lambda^2, \; z = \lambda$$

oder für

$$\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$x = \beta^2, \; y = k\alpha^2, \; z = \alpha\beta.$$

Auch bei Zugrundelegung eines Polardreiecks ist die Lösung sehr einfach. Dann wird die Gleichung von der Form:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0.$$

Wenn die Kurve reell sein soll, so dürfen nicht alle Coefficienten dasselbe Vorzeichen haben und man kann es daher so einrichten, dass zwei von ihnen, etwa a_{11} und a_{22}, positiv, der letzte negativ ist. Dann setze man:

$$x = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}(1 - \lambda^2), \quad y = \frac{2}{\sqrt{a_{22}}}\lambda, \quad z = \frac{1}{\sqrt{-a_{33}}}(1 + \lambda^2).$$

Für irgend eine Gleichung zweiten Grades aber:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

die hier der Bequemlichkeit wegen in gewöhnlichen Koordinaten angenommen wird, berechne man irgend einen Punkt $P_0(x_0, y_0)$ der Kurve und setze dann:

$$\lambda = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

so dass λ in rechtwinkligen Koordinaten den Richtungscoefficienten des durch $P_0(x_0, y_0)$ und den laufenden Punkt $P(x, y)$ gehenden Strahles bedeutet, bestimme hieraus:

$$y = y_0 + \lambda(x - x_0)$$

und setze diesen Ausdruck in die Gleichung ein. Dann muss sich x und zuletzt auch y rational durch λ ergeben.

Beispiel: In § 8 wurde die Gleichung:

$$-6x^2 - 4xy - 5y^2 + 24x + 5y + 30 = 0$$

für einen Kegelschnitt bestimmt, von welchem 5 Punkte bekannt waren. Einer derselben war $(-1, \pm 0)$, also setze man von diesem ausgehend:

$$\lambda = \frac{y}{x+1}, \quad y = \lambda \cdot (x + 1).$$

Durch Einführen in die vorgelegte Gleichung folgt nach Vornahme der Rechnung:

$$x^2(-6 - 4\lambda - 5\lambda^2) + x(24 + \lambda - 10\lambda^2) + (30 + 5\lambda - 5\lambda^2) = 0.$$

Diese Gleichung muss, welchen Werth λ auch habe, für $x = -1$ erfüllt werden, da der Strahl durch den Punkt $(-1,0)$ hindurchgeht. Nach Division mit $x + 1$ bleibt übrig:

$$x(-6 - 4\lambda - 5\lambda^2) + 30 + 5\lambda - 5\lambda^2 = 0,$$

und also:

$$x = \frac{30 + 5\lambda - 5\lambda^2}{6 + 4\lambda + 5\lambda^2},$$

$$y = \lambda \cdot (x + 1) = \frac{36\lambda + 9\lambda^2}{6 + 4\lambda + 5\lambda^2}.$$

Setzt man für $\lambda = 0$, so folgt $x = +5$, $y = 0$, $\lambda = +1$, so folgt $x = +2$, $y = +3$, also zufällig 2 andere von den fünf gegebenen Punkten.

Bemerkung: Löst man die allgemeine Gleichung $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \ldots . = 0$ nach y auf, so ergiebt sich y in der Gestalt:

$$y = \alpha x + \beta \pm \sqrt{\gamma x^2 + \delta x + \varepsilon}.$$

Da nun diese Gleichung durch Einsetzen der rationalen Ausdrücke von x und y durch λ identisch erfüllt werden muss, so folgt, dass dann die $\sqrt{\gamma x^2 + \delta x + \varepsilon}$ „aufgehen", d. h. rational werden muss, womit der bekannte, für die Integralrechnung so wichtige Satz bewiesen ist, dass eine Quadratwurzel zweiten Grades $\sqrt{\gamma x^2 + \delta x + \varepsilon}$ stets durch eine Substitution von der Form:

$$x = \frac{p_1\lambda^2 + q_1\lambda + r_1}{p_3\lambda^2 + q_3\lambda + r_3}$$

rational gemacht werden kann. Es ist aber nur in Ausnahmefällen gelungen, höhere algebraische Irrationalitäten, z. B. Quadratwurzeln aus Ausdrücken höheren Grades durch geeignete Substitutionen zu entfernen, was wieder mit der Unmöglichkeit zusammenhängt, für Kurven höherer Ordnung allgemein giltige rationale Parameterdarstellungen zu finden.

Es seien in 2) für λ zwei Werthe λ und λ_1 eingesetzt worden, sodass

$$x = p_1\lambda^2 + q_1\lambda + r_1, \; x_1 = p_1\lambda_1{}^2 + q_1\lambda_1 + r_1$$

u. s. w. Die Koordinaten u, v, w der Verbindungslinie der beiden auf diese Weise ermittelten Punkte P und P' des Kegelschnittes werden dann nach § 21 durch die Formeln gegeben:

$$u = yz_1 - zy_1, \; v = zx_1 - xz_1, \; w = xy_1 - yx_1.$$

Daher:

$$u = (p_2\lambda^2 + q_2\lambda + r_2)\,(p_3\lambda_1{}^2 + q_3\lambda_1 + r_3) - (p_3\lambda^2 + q_3\lambda + r_3) \cdot (p_2\lambda^2_1 + q_2\lambda_1 + r_2)$$

oder auch:

$$u = (q_2r_3 - q_3r_2)\,(\lambda - \lambda_1) + (r_2p_3 - p_2r_3)\,(\lambda_1{}^2 - \lambda^2) + (p_2q_3 - q_2p_3)\,(\lambda^2\lambda_1 - \lambda_1{}^2\lambda).$$

Lässt man hier und ebenso in den Ausdrücken für v und w den Faktor $\lambda - \lambda_1$ fort und bemerkt, dass die Coefficienten $q_2r_3 - q_3r_2$ etc. mit den vorhin eingeführten Unterdeterminanten P_1 etc. übereinstimmen, so folgt zuletzt:

$$\begin{aligned} u &= P_1 - Q_1\,(\lambda + \lambda_1) + R_1\lambda\lambda_1 \\ v &= P_2 - Q_2\,(\lambda + \lambda_1) + R_2\lambda\lambda_1 \\ w &= P_3 - Q_3\,(\lambda + \lambda_1) + R_3\lambda\lambda_1. \end{aligned} \qquad 3)$$

In 3) sind also die Koordinaten der Verbindungslinien zweier Punkte P und P' mit den Parametern λ und λ_1 niedergelegt. Sie werden, wie man sieht, „bilineare" Funktionen

von λ und λ_1. Wird zwischen P und P' eine Projektivität, zwischen λ und λ_1 also eine Gleichung von der Form:

$$\lambda_1 = \frac{a + b\lambda}{c + d\lambda}$$

angenommen, so werden nach Einsetzen in 3) und Fortlassen des Nenners die Koordinaten u, v, w quadratische Funktionen von λ, womit angezeigt wird, dass die Verbindungslinien entsprechender Punkte einen Kegelschnitt umhüllen. (Siehe § 23.) Sind aber P und P' involutorisch aufeinander bezogen, so ist $b = -c$, und die Gleichung zwischen λ und λ_1 erhält die Gestalt:

$$d\lambda\lambda_1 - b(\lambda + \lambda_1) - a = 0,$$

worauf nach Einsetzen in 3) sich u, v, w als lineare Funktion von $\lambda + \lambda_1$ oder $\lambda \cdot \lambda_1$ ergeben. Die Linie u, v, w beschreibt daher ein Strahlenbüschel, wie schon im vorigen § erwiesen.

Lässt man endlich, um zu den Tangenten zu gelangen, P und P' zusammenfallen, was durch die Gleichung $\lambda = \lambda_1$ ausgedrückt wird, so geben die Formeln 3):

$$\begin{aligned} u &= P_1 - 2Q_1\lambda + R_1\lambda^2 \\ v &= P_2 - 2Q_2\lambda + R_2\lambda^2 \\ w &= P_3 - 2Q_3\lambda + R_3\lambda^2 \end{aligned} \qquad 4)$$

also die zu 2) reciproke Parameterstellung der Kegelschnitte in Linienkoordinaten.

Aufgaben.

1. Wenn die Determinante der Parameterdarstellung 2) $= 0$ ist, so artet der Kegelschnitt im allgemeinen in eine Doppellinie aus, d. h. in eine Gerade, von der jeder Punkt durch zwei Werthe des Parameters λ dargestellt wird.

2. Gegeben die Mittelpunktsgleichung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Man bilde eine Parameterdarstellung derart, dass für $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ die beiden Scheitel der grossen Achse für $\lambda = +1$, $\lambda = -1$ die beiden Scheitel der kleinen Achse erhalten werden.

2. Man beweise durch Abzählen von Constanten, dass nicht alle Kurven dritter Ordnung durch einen Parameter rational darstellbar sind, sondern dass hierzu eine Bedingung zwischen den Coefficienten der Gleichung erfüllt sein muss.

§ 25.

Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaaren.

Die Gleichung

$$U + \lambda V = 0 \qquad \textbf{1)}$$

mit dem Parameter λ stellt, wenn U und V Ausdrücke ersten Grades in x, y, z sind, ein Strahlenbüschel vor, setzt man aber U und V als irgend welche Funktionen zweiten Grades:

$$U \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2$$
$$V \equiv a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_{13}xz + 2a'_{23}yz + a'_{33}z^2,$$

so ist 1) der Ausdruck für das allgemeinste durch die Kegelschnitte $U = 0$, $V = 0$ bestimmte Kegelschnittbüschel.

Durch einen gegebenen Punkt geht nur ein Kegelschnitt des Büschels, dessen Parameter λ durch die Gleichung

$$\lambda = -\frac{U}{V}$$

vermittelt wird, wenn in U und V für x, y, z die Koordinaten dieses Punktes eingesetzt werden. Auszunehmen sind aber diejenigen Punkte, deren Koordinaten sowohl der Gleichung $U = 0$, als auch der Gleichung $V = 0$ erfüllen, d. h. die Schnittpunkte der vorgelegten Kegelschnitte. Durch diese Punkte gehen alle Kegelschnitte des Büschels, sie bilden seine Grundpunkte. Ihre Anzahl ist im allgemeinen $= 4$, wenn man die etwa imaginär ausfallenden mitzählt. [Für ein Kreisbüschel z. B., bei dem in § 12 nur von zwei Grundpunkten die Rede war, fallen die beiden anderen mit den unendlich fernen, imaginären Kreispunkten zusammen.]

Jede Verbindungslinie zweier Grundpunkte wird eine Chordale des Büschels genannt; es giebt ihrer daher im allgemeinen sechs; sie spielen für die Geometrie des Büschels eine hervorragende Rolle, die aus der Untersuchung der Frage hervorgeht, ob es in ihm auch zerfallende Kegelschnitte giebt.

Schreibt man die Gleichung 1) vollständig aus, also:

$$U + \lambda V = (a_{11} + \lambda a'_{11})\, x^2 + 2\,(a_{12} + \lambda a'_{12})\, xy \ldots = 0 \qquad \textbf{1')}$$

und setzt die Bedingung $D = 0$ nach § 18 für das Zerfallen an, so folgt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a'_{11}, & a_{12} + \lambda a'_{12}, & a_{13} + \lambda a'_{13} \\ a_{21} + \lambda a'_{21}, & a_{22} + \lambda a'_{22}, & a_{23} + \lambda a'_{23} \\ a_{31} + \lambda a'_{31}, & a_{32} + \lambda a'_{32}, & a_{33} + \lambda a'_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies wird entwickelt zu einer kubischen Gleichung. Daher giebt es im allgemeinen 3 Linienpaare im Büschel.

Dieselben können auch sofort mit Hilfe der Grundpunkte erkannt werden, sie können nichts anderes sein, als je zwei gegenüberliegende Chordalen. Denn ein solches Paar bildet einen durch die vier Grundpunkte gehenden Kegelschnitt, muss also zum Büschel gehören.

Anmerkung: Aus diesem Grunde kann die Lehre von den Kegelschnittbüscheln zuweilen mit Vortheil zur Ermittelung der Gleichung eines bestimmten Kegelschnittes benutzt werden. Gesetzt z. B. es soll durch die fünf Punkte $P_1 (+1, +1)$, $P_2 (+3, +1)$, $P_3 (+4, +2)$, $P_4 (+3, +5)$, $P_5 (+2, +4)$ ein Kegelschnitt gelegt werden, so nehme man erst vier Punkte, etwa P_1, P_2, P_3, P_4 als Grundpunkte eines Büschels. Dann haben die Chordalen P_1P_2 und P_3P_4 die Gleichungen (siehe § 7) $y - 1 = 0$ und $y + 3x - 14 = 0$. Ebenso ermittele man die Gleichungen der Chordalen P_1P_3 und P_2P_4: $3y - x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$. Also ist die Gleichung des Büschels:

$$(y - 1)(y + 3x - 14) + \lambda (x - 3)(3y - x - 2) = 0.$$

Wird hier der fünfte Punkt $P_5 (+2, +4)$ eingesetzt, so folgt $\lambda = -\frac{3}{2}$ und daher nach Auflösung der Klammern und Zusammenziehung die gesuchte Gleichung:

$$3x^2 - 3xy + 2y^2 - 9x - 3y + 10 = 0.$$

Obschon dieser Herleitung die Symmetrie fehlt, so ist sie meist erheblich kürzer als die in § 8 gegebene, wie dieses Beispiel zeigt.

Wie in § 22 erwiesen, ist das Diagonaldreieck jedes einem Kegelschnitt einbeschriebenen Vierecks ein Polardreieck dieses Kegelschnittes. Nimmt man also hier die vier Grundpunkte zu Ecken des Vierecks, so ist das Diagonaldreieck sich selbst polar in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels, es ist das Polardreieck desselben. Wählt man es zum Koordinatendreieck, so werden U und V beide „rein":

$$U \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2, \quad V \equiv a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33}z^2,$$

und das Büschel erhält seine einfachste analytische Gestalt, insofern seine Gleichung nur noch rein quadratische Glieder enthält.

Zu einem sehr wichtigen Satze gelangt man, wenn das Büschel von einer Geraden geschnitten wird. Werden rechtwinklige Koordinaten genommen und diese Gerade zur x-Achse gewählt, so ist $z = 1$ und für diese Gerade $y = 0$ zu setzen, sodass aus 1) die Gleichung folgt:

$$(a_{11} + \lambda a'_{11})\, x^2 + 2\,(a_{13} + \lambda a'_{13})\, x + (a_{33} + \lambda a'_{33}) = 0,$$

welche für jedes λ, d. h. für jeden Kegelschnitt die Abscissen x_1 und x_2 der beiden Schnittpunkte bestimmt. Daher ist:

$$x_1 + x_2 = -2\,\frac{a_{13} + \lambda a'_{13}}{a_{11} + \lambda a'_{11}},\quad x_1 \cdot x_2 = \frac{a_{33} + \lambda a'_{33}}{a_{11} + \lambda a'_{11}}.$$

Durch Elimination von λ entsteht zwischen x_1 und x_2 eine Gleichung von der Form:

$$a x_1 x_2 + b\,(x_1 + x_2) + c = 0,$$

womit nach § 3 sofort der Satz bewiesen ist:

Ein Kegelschnittbüschel schneidet aus jeder Geraden der Ebene eine Involution heraus.

Im besonderen folgt daher, dass die 6 Seiten eines vollständigen Vierecks von jeder Geraden in einer Involutionsgruppe geschnitten werden (siehe § 3).

Hat die Involution reelle Doppelpunkte, so wird die Gerade von zwei Kegelschnitten des Büschels berührt, sodass die Aufgabe, einen Kegelschnitt zu zeichnen, der durch vier Punkte gehen und eine Gerade berühren soll im allgemeinen zwei Lösungen besitzt. Entfernt sich die Gerade in die Unendlichkeit, so sieht man, dass durch vier Punkte zwei Parabeln gehen, die in der That reell sind, wenn man sie zu einem Viereck mit nur ausspringenden Ecken verbinden kann.

Sucht man nach 3) § 22 die Koordinaten u, v, w der Polare l irgend eines Punktes $P(x, y, z)$ in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt des Büschels, so findet man sofort lineare Ausdrücke in λ. Daher:

Die Polaren eines Punktes der Ebene in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte des Büschels bilden ein Strahlenbüschel. Es giebt daher zu jedem Punkt im allgemeinen einen und nur einen andern Punkt, der in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte harmonischer Pol des ersteren ist. Je zwei solche Punkte heissen conjugirte Pole des Büschels.

Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn der Punkt mit einer Ecke des Polardreiecks zusammenfällt, weil dann die gegenüberliegende Seite für jeden Kegelschnitt dessen Polare ist.

Wenn man umgekehrt die Pole einer Geraden u, v, w in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte nimmt, so findet man sofort, dass letztere quadratische Funktionen von λ werden. Da ausserdem der Pol einer Geraden für den Fall, dass der Kegelschnitt zerfällt, im allgemeinen mit dem Schnittpunkt der den Kegelschnitt bildenden Linien zusammenfällt, so folgt:

Die Pole einer Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels bilden einen durch die Ecken des Polardreiecks gehenden Kegelschnitt. Liegt die Gerade unendlich fern, so gewinnt dieser Satz die Gestalt:

Die Mittelpunkte der Kegelschnitte eines Büschels liegen auf einem (nicht zum Büschel gehörenden) Kegelschnitt, welcher durch die Mitten der sechs Chordalen und durch die drei Diagonalpunkte hindurchgeht. Stehen im besondern die Chordalen paarweise aufeinander senkrecht, in welchem Falle das Büschel nach § 19 Seite 230 aus lauter gleichseitigen Hyperbeln besteht, so geht dieser Kegelschnitt in den aus der Elementargeometrie wohl bekannten Feuerbach'schen „Kreis der neun Punkte“ über.

Definition: Werden aus einem Kegelschnittbüschel irgend vier Kegelschnitte herausgegriffen, die den Werthen λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 für den Parameter λ entsprechen, so versteht man unter ihrem Doppelverhältniss den Bruch $\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3)}$.

Durch diese Definition wird der Grundbegriff der Projektivität von Strahlenbüscheln auf Kegelschnittbüschel übertragen. Da, wie vorhin ausgeführt, die Koordinaten u, v, w der Polaren eines beliebigen Punktes $P(x, y, z)$ lineare Funktionen von λ werden, so ist das Doppelverhältniss der vier Kegelschnitte = dem Doppelverhältniss der vier Polaren. Lässt man im besonderen den Punkt $P(x, y, z)$ mit einem Grundpunkt zusammenfallen, so werden die Polaren zu Tangenten. Daher:

Das Doppelverhältniss von vier Kegelschnitten eines Büschels stimmt mit dem Doppelverhältniss der vier Tangenten

in irgend einem Grundpunkte an diese Kegelschnitte überein.[1])

Weiter wollen wir die Geometrie des Kegelschnittbüschels nicht verfolgen. Nur sei noch erwähnt, dass die hier gegebenen Sätze zahlreiche Unterfälle und durch dieselben bedingten Ausnahmen aufweisen, die aber gegebenen Falls sofort namhaft gemacht werden können. Auch kann das Büschel selbst Wandlungen durchmachen. Wenn z. B. zwei von den Grundpunkten zusammenfallen, so besteht es aus allen Kegelschnitten, welche durch drei Punkte gehen und eine durch einen dieser Punkte gezogenen Gerade berühren. Oder es können auch noch die beiden anderen Grundpunkte zusammenfallen, so besteht das Büschel aus sämmtlichen Kegelschnitten, die einander in denselben beiden Punkten berühren (Kegelschnitte in doppelter Berührung sind schon in § 23 namhaft gemacht worden). Zu solchen Büscheln gehören z. B. auch concentrische Kreise (Berührungspunkte fallen mit imaginären Kreispunkten zusammen), concentrische, ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen und Hyperbeln mit denselben Asymptoten. Oder es können auch drei Punkte zusammenfallen, so gehen die Kegelschnitte durch zwei gegebene Punkte und haben in einem derselben eine Berührung zweiter Ordnung; oder endlich können auch alle vier zusammenfallen, so besteht das Büschel aus allen Kegelschnitten, die in einem Punkte eine Berührung dritter Ordnung eingehen u. s. w.

Wenn zwei Kegelschnittgleichungen in Linienkoordinaten

$$U \equiv F(u, v, w) = 0, \; V \equiv F_1(u, v, w) = 0$$

gegeben sind, so wird durch die lineare Verbindung

$$U + \lambda V = 0$$

gleichfalls eine Schaar von Kegelschnitten erzeugt, die die beiden gegeben enthält (für $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$) und durch sie bestimmt ist.

Diese Schaar ist aber durchaus nicht mit dem eben behandelten Kegelschnittbüschel zu verwechseln, sondern ist vielmehr eine Polarfigur desselben. Ihre Eigenschaften sind daher

[1]) Dieser Satz gilt auch für Büschel höherer Ordnung und ist dieser Allgemeinheit wegen von besonderer Wichtigkeit.

denen des letzteren reciprok und können ohne weiteres nach dem Prinzip der Reciprocität durch Uebertragung gefunden werden. Daher genügt die folgende Aufzählung:

1. Alle Kegelschnitte der Schaar berühren vier Gerade, die Grundgeraden der Schaar (die aber zum Theil oder alle imaginär sein können). Jede andere Gerade wird nur von einem Kegelschnitt berührt.

2. Es giebt in der Schaar drei (in je zwei Strahlenbüschel zerfallende) Kegelschnitte, deren Centren die sechs durchschnittspunkte der Grundgeraden sind. Durch paarweise Verbindung dieser Centren wird das gemeinsame Polardreieck hergestellt, auf welches bezogen die Gleichung der Schaar „rein" wird.

3. Die Schaar wird von einem beliebigen Punkte in einem involutorischen Strahlenbüschel projicirt, wenn die beiden Tangenten an denselben Kegelschnitt einander zugeordnet werden. Die Doppelstrahlen dieser Involution sind die Tangenten der beiden Kegelschnitte der Schaar, welche durch diesen Punkt gehen. Daher hat die Aufgabe, einen Kegelschnitt zu finden, der vier Gerade berührt und durch einen Punkt geht, im allgemeinen zwei Lösungen. Ob diese Lösungen reell oder imaginär sind, richtet sich nach dem Felde, in welchem der Punkt liegt, wobei unter Feld irgend ein von zwei, drei oder allen vier Grundgeraden begrenzter Theil der Ebene verstanden wird. Befindet er sich innerhalb des Vierecks, welches vier Gerade stets einschliessen (wenn keine zwei parallel sind oder keine drei durch denselben Punkt gehen), so sind die Kegelschnitte reell (bestehen aus 2 Ellipsen, die ganz innerhalb des Vierecks liegen und dessen Seiten berühren) und ebenso sind sie reell, wenn der Punkt in einem der Scheitelfelder liegt, die mit dem Viereck nur eine Ecke gemeinsam haben, imaginär dagegen, wenn der Punkt in einem der sechs übrigen Felder liegt. Befindet sich der Punkt aber auf einer der Grundgeraden selbst, so fallen die beiden Kegelschnitte in einen zusammen.

4. Die Pole irgend einer Geraden zu sämmtlichen Kegelschnitten der Schaar liegen wieder auf einer Geraden. Diese beiden Geraden sind conjugirt in Bezug auf die Schaar. Im besonderen liegen daher die Mittelpunkte der Schaar auf

einer Geraden, welche mit der Verbindungslinie der Mitten der drei Diagonalen des Grundvierseits zusammenfällt, es sei denn, dass die beiden gegebenen Kegelschnitte denselben Mittelpunkt haben, weil dann dieser mit einer Ecke des Polardreiecks zusammenfällt und daher Mittelpunkt eines jeden Kegelschnitts der Schaar wird.

Ein sehr bekannter Fall der hier behandelten Schaar sind die „confokalen Kegelschnitte", d. h. das System aller Kegelschnitte mit denselben Brennpunkten. Hier wird das Grundvierseit von den vier durch die Brennpunkte gehenden Nulllinien gebildet, woraus zu schliessen, dass von ihm weiter nichts reell ist, als die beiden Brennpunkte, welche als ein Paar Gegenecken anzusehen sind, während das zweite Paar aus den imaginären Brennpunkten (siehe § 13) und das dritte Paar aus den beiden unendlich fernen Kreispunkten besteht. Dagegen ist das gemeinsame Polardreieck reell; es wird von den beiden Hauptachsen und der unendlich fernen Geraden gebildet.

Um aber diesen wichtigen Specialfall gesondert zu behandeln, wähle man die beiden Hauptachsen zur x- und y-Achse, bezeichne mit e die allen Kegelschnitten gemeinsame halbe Excentricität und mit a die grosse, beziehungsweise (für die Hyperbel) die reelle Halbachse. Dann sind die Gleichungen all dieser Kegelschnitte in Punktkoordinaten:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1 = 0$$

oder, wenn $a^2 - e^2 = \lambda$, $a^2 = e^2 + \lambda$ gesetzt wird:

$$\frac{x^2}{e^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\lambda} - 1 = 0,$$

daher in Linienkoordinaten:

$$u^2 (c^2 + \lambda) + v^2 \lambda - 1 = 0$$

oder:

$$(u^2 e^2 - 1) + \lambda (u^2 + v^2) = 0,$$

womit in der That zur Evidenz hervorgeht, dass confokale Kegelschnitte eine lineare Kegelschnittschaar bilden.

Durch jeden Punkt P der Ebene geht eine Ellipse und eine Hyperbel der confokalen Schaar. Die Tangenten in P an diese beiden Kurven sind nach Satz 3) Doppelstrahlen der Involution, durch welche die Schaar von P aus projicirt wird.

Sie müssen daher zu den beiden durch P gehenden Nullstrahlen harmonisch liegen, also senkrecht aufeinander stehen; andererseits bilden sie auch mit den beiden Brennstrahlen ein harmonisches Büschel, sie halbiren daher die Winkel der Brennstrahlen (siehe § 13 und 14), woraus übrigens der Satz folgt, dass confokale Ellipsen und Hyperbeln sich überall senkrecht durchdringen. Und da diese Doppelstrahlen zu den beiden Tangenten von P an jeden Kegelschnitt der Schaar gleichfalls harmonisch liegen, so folgt der Satz des § 13 von Neuem, dass die Winkelhalbirenden der Brennstrahlen zugleich Winkelhalbirende dieser Tangenten sind.

Zwei Kegelschnitte bestimmen ein Büschel und eine lineare Schaar, je nachdem man ihre Gleichungen in Punktkoordinaten oder in Linienkoordinaten linear mit einander verbindet. Beide Gebilde, Büschel und Schaar sind im allgemeinen durchaus verschieden, sind aber doch in einem besonderen Falle wieder identisch, dann nämlich, wenn die beiden gegebenen Kegelschnitte sich in zwei Punkten berühren. Dann fallen die vier Grundpunkte des Büschels, sich paarweise deckend, mit den beiden Berührungspunkten zusammen, und die vier Grundseiten der Schaar mit den beiden Tangenten in diesen Berührungspunkten. Büschel und Schaar werden dann von allen den Kegelschnitten gebildet, die die beiden gegebenen in den genannten Punkten berühren, sie vereinigen sich zu einem System doppeltberührender Kegelschnitte, von dem vorhin schon die Rede war.

Wenn die beiden gemeinsamen Berührungspunkte imaginär, d. h. in Wirklichkeit nicht vorhanden sind, so bleibt nichtsdestoweniger die Identität zwischen Büschel und Schaar zu Recht bestehen. Ein solcher eigenartiger Fall, ausser den schon vorhin erwähnten ähnlichen, ähnlich liegenden und concentrischen Ellipsen ist noch in allen Kegelschnitten zu erwähnen, die denselben Brennpunkt und dieselbe, diesem Brennpunkt zugehörende Leitlinie haben. Hier sind die beiden Tangenten mit den Nulllinien durch den Brennpunkt identisch, während die beiden Berührungspunkte auf der Leitlinie liegen. Um aber, ohne durch das Imaginäre hindurchzugehen, die genannte Identität nachzuweisen, nehme man den Brennpunkt als Anfangspunkt und die Senkrechte durch ihn zur Leitlinie als

x-Achse. Endlich bezeichne man den Abstand der Leitlinie vom Brennpunkte mit q. Dann ist nach Satz 6) § 13:

$$\frac{r}{\Delta} = \varepsilon,$$

d. h.:

$$x^2 + y^2 - \varepsilon^2(x - q)^2 = 0,$$

während die Transformation in Linienkoordinaten ergiebt:

$$\varepsilon^2\left(\left(u + \frac{1}{q}\right)^2 + v^2\right) - \frac{1}{q^2} = 0.$$

Setzt man hier in beiden Gleichungen $\varepsilon^2 = \lambda$, so stellt sich in der That heraus, dass λ sowohl in der Punktkoordinatengleichung als auch in der Linienkoordinatengleichung nur im ersten Grade auftritt.

Die in diesem Paragraphen vorgetragene Theorie der Büschel und Schaaren von Kegelschnitten ist vielmehr nur ein flüchtiger Entwurf einer solchen, zu dessen gründlicher Ausgestaltung aber hier der Raum fehlt. Vielleicht aber regt sie gerade deshalb den schon vorgeschritteneren Leser zu eigenen Gedanken und Betrachtungen, namentlich über einfache, aber tiefgreifende analytische Darstellungen mannigfaltig verzweigter geometrischer Gebilde an, die in ihrer vollendeten Kürze und Sachlichkeit ein so erfolgreiches Eindringen in die verschlungenen geometrischen Sätze und Konstruktionen gestatten, wie es durch noch so zahlreiche aber unzusammenhängende Sonderbeweise, zumal wenn sie nur Beweise und nicht systematische Entwickelungen sind, nimmermehr möglich ist. Nicht die Einzelresultate selbst sind es dann, sondern die schöpferische Fruchtbarkeit der Methoden, die den ganzen Zusammenhang, sozusagen den Organismus der Gebilde aufdecken, und hauptsächlich werth zu halten sind. Auch in vielen praktischen Beziehungen wird derjenige, der die analytische Geometrie bis zu den Kegelschnitten einschliesslich mit einer gewissen Meisterschaft beherrscht, aus ihnen Vortheil ziehen, wie z. B. in der darstellenden Geometrie, und in der Mechanik und Statik.

Aufgaben.

1. Wenn sich in einem Kegelschnittbüschel ein Kreis befindet, so haben alle seine Kegelschnitte parallel gerichtete Hauptachsen.

2. Gegeben ein Kegelschnitt $F(x, y, z) = 0$ und ein Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ auf ihm. Gesucht die analytische Darstellung desjenigen Kegelschnittbüschels, das diesen Kegelschnitt enthält und dessen Grundpunkte alle vier mit P zusammenfallen. (Büschel, dessen Kurven eine Berührung dritter Ordnung haben.)

3. Vermittelst der in 2) genannten Büschel sind Ausdrücke für Radien der Krümmungskreise in den Scheiteln von Ellipse, Hyperbel und Parabel abzuleiten.

---

§ 26.

Abbildungen und geometrische Verwandtschaften.

Wenn etwa das Muster eines Teppichs photographirt oder ein Schachbrett mit seinen 64 Feldern in Perspektive gesetzt wird, so handelt es sich im geometrischen Sinne um die Abbildung eines geometrischen ebenen Gebildes auf ein anderes, bei der jedem Punkte des Gegenstandes ein Punkt des Bildes entsprechen soll und umgekehrt.

Solche Abbildungen, beziehungsweise die aus ihnen entspringenden geometrischen Verwandtschaften spielen gerade in den Anwendungen der Mathematik eine hervorragende Rolle. Handelt es sich nicht um 2 Ebenen, sondern um 2 Gerade, so haben wir in der Projektivität eine solche Abbildung ausführlich kennen gelernt, und von diesem Gesichtspunkt ist der Hauptinhalt dieses letzten § als eine Ausdehnung des Projektivitätsbegriffes auf ebene Gebilde anzusehen.

Es seien also zwei Ebenen E_1 und E_2 gegeben, wobei es an sich gleichgiltig ist, ob dieselben zusammenfallen oder ob sie wirklich getrennt im Raume liegen, nur dass im ersten Falle jeder Punkt der Ebene sowohl zu E_1 als auch zu E_2 gerechnet werden kann. Man entscheide sich in E_1 für irgend ein rechtwinkliges Koordinatensystem der x, y und in E_2 für ein solches der ξ, η. Soll nun jedem Punkt $P(x, y)$ ein Punkt $Q(\xi, \eta)$ entsprechen, so ist damit gesagt, dass man ξ und η aus x und y berechnen kann. Daher muss zuletzt jede derartige geometrische Verwandtschaft, analytisch gedeutet auf zwei Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned} \xi &= F_1(x, y) \\ \eta &= F_2(x, y) \end{aligned} \qquad 1)$$

zurückgeführt werden können, in denen F_1 und F_2 irgend zwei gegebene Funktionen von x und y sind.

Es sei z. B.:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{y}, \text{ also } F_1(x, y) = \frac{x}{y} \\ \eta &= \frac{1}{y} \qquad\quad F_2(x, y) = \frac{1}{y} \text{ (enthält kein } x\text{)}, \end{aligned} \qquad 1')$$

so ist jedem Punkt $P(x, y)$ hiernach ein Punkt $Q(\xi, \eta)$ zugeordnet.

Durch Umkehrung folgt sofort:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\xi}{\eta} \\ y &= \frac{1}{\eta} \end{aligned} \qquad 1'')$$

Da 1') und 1'') ganz gleich gebildet sind, so ist zu schliessen, dass die geometrische Verwandtschaft zwischen E_1 und E_2 umkehrbar ist. — Eine weitere Eigenthümlichkeit dieser Verwandtschaft ergiebt die Annahme, dass $Q(\xi, \eta)$ eine Gerade

$$a\xi + b\eta + c = 0$$

beschreiben. Diese Gleichung formt sich nach 1') um in:

$$a\frac{x}{y} + \frac{b}{y} + c = 0$$

oder:

$$ax + b + cy = 0.$$

Somit entspricht einer Geraden in E_1 stets eine Gerade in E_2 und man nennt die beiden Ebenen „collinear" aufeinander bezogen.

Selbstverständlich können statt rechtwinkliger auch schiefwinklige Koordinaten, ja sogar homogene Dreieckskoordinaten genommen werden. Nur treten im letzteren Falle, wenn $P(x, y, z)$ und $Q(\xi, \eta, \zeta)$ entsprechende Punkte sein sollen, an Stelle der beiden Gleichungen 1) ihrer drei:

$$\xi = \varphi_1(x, y, z), \ \eta = \varphi_2(x, y, z), \ \zeta = \varphi_3(x, y, z)$$

wobei allerdings die Funktion φ_1, φ_2, φ_3 homogen und von gleichem Grade sein müssen, damit die Verhältnisse $x : y : z$ auch wirklich in Verhältnisse $\xi : \eta : \zeta$ übergeführt werden. Im

besonderen können rückwärts Gleichungen von der Form 1) stets homogen gemacht werden. So können z. B. an Stelle der Gleichungen 1') die drei Gleichungen:

$$\xi = x,\ \ \eta = z,\ \ \zeta = y$$

gesetzt werden, aus denen $\frac{\xi}{\zeta} = \frac{x}{y}, \frac{\eta}{\zeta} = \frac{z}{y}$ und also zuletzt wieder die Gleichungen 1') folgen, wenn statt $\frac{\xi}{\zeta}$ und $\frac{\eta}{\zeta}$ wieder ξ und η; statt $\frac{z}{y}$ wieder $\frac{1}{y}$ gesetzt wird.

Bleiben wir aber vor der Hand bei rechtwinkligen Koordinaten stehen und betrachten nunmehr die einfachsten geometrischen Verwandtschaften, welche es überhaupt giebt, nämlich:

a) Die Congruenz. Sie wird sofort durch die Transformationsformeln (§ 4) vermittelt:

$$x = \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi + a$$
$$y = \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi + b$$

nur dass jetzt $P\ (x, y)$ und $Q\ (\xi, \eta)$ zwei verschiedene, vielleicht in zwei verschiedenen Ebenen E_1 und E_2 liegende Punkte sein sollen, während früher durch dieselben Gleichungen ein und derselbe Punkt in zwei verschiedenen rechtwinkligen Koordinatensystemen dargestellt wurde. Entsprechen sich auch noch die Koordinatensysteme selbst, so vereinfachen sich die Formeln in:

$$x = \xi,\ y = \eta,$$

womit die Congruenz zur Evidenz gebracht ist.

b) Die Aehnlichkeit. Sie wird durch die Transformationsformeln gegeben:

$$x = \lambda\xi \cos\varphi - \lambda\eta \sin\varphi + a$$
$$y = \lambda\xi \sin\varphi + \lambda\eta \cos\varphi + b,$$

wo λ das Aehnlichkeitsverhältniss oder den Massstab der Vergrösserung oder Verkleinerung bedeutet. Werden die Koordinatenanfangspunkte in entsprechende Punkte hineingelegt und lässt man auch die Achsen einander entsprechen, so vereinfacht sich die Transformation in:

$$x = \lambda \cdot \xi,\ y = \lambda \cdot \eta.$$

c) Die allgemeinste „affine“ Verwandtschaft. Sie wird durch die Formeln vermittelt:

$$x = a_1\xi + b_1\eta + c_1$$
$$y = a_2\xi + b_2\eta + c_2, \qquad 2)$$

in welchen a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 irgend welche 6 Coefficienten sein können, nur dass die Determinante $\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}$ nicht verschwinden darf, weil sonst die Umkehrung, durch welche diese Determinante in den Nenner kommt, im allgemeinen $\xi = \infty$, $\eta = \infty$ geben würde.

Da die Formeln der Affinität linear sind, so bleiben Ordnung (und Klasse) bei affiner Abbildung unverändert und im besonderen entsprechen geraden Linien wieder gerade Linien und zwar so, dass der unendlich fernen Geraden von E_1 die unendlich ferne Gerade von E_2 zugehört. Es sei

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

irgend eine Gerade in E_1, so ist die entsprechende Gerade in E_2:

$$(a_1\alpha + a_2\beta)\,\xi + (b_1\alpha + b_2\beta)\,\eta + (c_1\alpha + c_2\beta + \gamma) = 0$$

Daraus geht hervor, dass parallele Linien sich wieder in parallele Linien transformiren. Auch lässt sich leicht zeigen, dass das einfache Verhältniss zwischen drei in einer Geraden liegenden Punkten bestehen bleibt und also im besonderen der Satz gilt: „Mitte bleibt Mitte“.

Aus einem Rechteck wird durch die Affinität ein Parallelogramm, aus einem Kreis eine Ellipse u. s. w. Besonders wichtig aber ist die Affinität deshalb, weil selbst die allgemeinste Verwandtschaft — abgesehen von singulären Stellen — im „unendlich kleinen“ affin wird. Denn durch totales Differenziren von 1) folgt[1]):

$$d\xi = \frac{dF_1}{dx} \cdot dx + \frac{dF_1}{dy} \cdot dy$$
$$d\eta = \frac{dF_2}{dx} \cdot dx + \frac{dF_2}{dy} \cdot dy.$$

Nun sind dx und dy die relativen Koordinaten eines dem Punkte $P\,(x, y)$ unendlich benachbarten Punktes, bezogen auf P selbst und entsprechendes gilt für $d\xi$ und $d\eta$ und demnach geben die Differentialformeln in der That eine Affinität im unendlich kleinen.

[1]) Verfasser darf wohl „wagen“, im letzten § auch einmal zu differenziren.

Bemerkung: Für bestimmte Arten von Abbildungen sind solche geometrische Verwandtschaften von besonderer Wichtigkeit, die nicht allein im unendlich kleinen „affin“, sondern sogar „ähnlich“ sind. Fast alle in unseren Atlanten gebrauchten Projektionsarten, so die stereographische und die Merkatorprojektion wahren die Aehnlichkeit wenigstens in den kleinsten Theilen, trotzdem eine Kugel oder ein beliebiger endlicher Theil einer solchen im „Grossen“ offenbar nicht ähnlich auf eine Ebene gezeichnet werden kann. Handelt es sich aber um die allgemeinste derartige Abbildung von Ebene auf Ebene, so springt „bekanntlich“ die Theorie der Funktionen complexer Veränderlicher ein, durch welche sie allesammt mittelst einer Formel von der Art:

$$x + iy = F(\xi + i\eta)$$

geliefert werden, wie diese Theorie es lehrt.

Die Formeln 2) der allgemeinsten Affinität können durch passende Wahl der beiden Koordinatensysteme erheblich vereinfacht werden. Man lasse hierzu zunächst die Anfangspunkte einander entsprechen, dann wird $a_3 = b_3 = 0$, also:

$$x = a_1\xi + b_1\eta$$
$$y = a_2\xi + b_2\eta.$$

Nun sei in E_1 ein Kreis mit r als Radius um den Anfangspunkt beschrieben:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Dieser transformirt sich in eine Ellipse:

$$(a_1^2 + a_2^2)\,\xi^2 + 2\,(a_1 b_1 + a_2 b_2)\,\xi\eta + (b_1^2 + b_2^2)\,\eta^2 - r^2 = 0$$

und zwar so, dass conjugirte, d. h. senkrechte Durchmesser des Kreises zu conjugirten Durchmessern der Ellipse werden (denn Mitte bleibt Mitte). Die Hauptachsen dieser Ellipse wähle man zu ξ- und η-Achsen und die entsprechenden auf einander senkrechten Radien des Kreises zu x- und y-Achsen, so dass den Gleichungen $x = 0$, $y = 0$ die Gleichungen $\xi = 0$, $\eta = 0$ entsprechen müssen. Dann wird also $a_2 = b_1 = 0$ und die Affinitätsgleichungen vereinfachen sich in:

$$x = \lambda_1\xi, \quad y = \lambda_2\eta,$$

d. h. jede Affinität kann zurückgeführt werden auf eine Zusammenpressung oder Ausdehnung in zwei zu einander senkrechten Richtungen im Verhältniss $\lambda_1 : 1$ und $\lambda_2 : 1$. Einem in E_2 gezeichnetes Quadrat mit den Seiten 1 und 1, dessen Seiten

diese Richtungen haben, entspricht in E_1 ein Rechteck mit den Seiten λ_1 und λ_2.

Sind λ_1 und λ_2 beide (absolut genommen) grösser oder beide kleiner als 1, so findet in jeder Richtung eine Verlängerung, beziehungsweise Verkürzung statt, deren Betrag von λ_1 bis λ_2 variirt; ist aber der eine Werth ein ächter, der andere ein unächter Bruch, so giebt es zwei zu den Achsen symmetrisch gelegene Richtungen, in denen weder eine Verlängerung, noch eine Verkürzung stattfindet und ist z. B. $\lambda_2 = 1$, so fallen diese beiden Richtungen mit der Richtung der y-Achse zusammen. Ist aber etwa $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$, so bleiben bei der Affinität die Flächeninhalte erhalten, während sonst der „Ausdehnungscoefficient" für die Fläche $= \lambda_1 \cdot \lambda_2 : 1$ (in der allgemeinen Formel 2) $= a_1 b_2 - b_1 a_2 : 1$) ist.

Da die allgemeinste affine Verwandtschaft, wie sie durch 2) dargestellt wird, sechs willkürliche Constante besitzt, so kann man verlangen, dass irgend drei Punkten P_1, P_2, P_3 von E_1 irgend drei Punkte Q_1, Q_2, Q_3 in E_2 entsprechen, nur dürfen weder P_1, P_2, P_3 noch Q_1, Q_2, Q_3 in einer geraden Linie liegen. Soll dann zu irgend einem Punkt P der entsprechende Punkt Q gefunden werden, so ziehe man z. B. durch P die Parallelen zu P_1P_3 und P_1P_2, bestimme die Schnittpunkte P_4 und P_5 mit ihnen, nehme nun Q_4 und Q_5 auf Q_1Q_2 und Q_1Q_3 so an, dass die einfachen Verhältnisse ohne Veränderung übertragen werden, so schneiden die Parallelen durch Q_4 und Q_5 zu Q_1Q_3 und Q_1Q_2 einander in dem entsprechenden Punkt Q zu P.

d) Die allgemeinste collineare Verwandtschaft. Die Affinität, welche Aehnlichkeit und Congruenz als besondere Fälle umfasst, ist selbst wieder ein besonderer Fall der allgemeinen Collinearität, zu der wir uns jetzt wenden. Hier ist es zweckmässig, in der Ebene E_1 irgend ein Fundamentaldreieck der x, y, z und in E_2 irgend ein anderes Fundamentaldreieck der x', y', z' anzunehmen. Sind dann $P(x, y, z)$ und $Q(x', y', z')$ zwei entsprechende Punkte, so wird die collineare Verwandtschaft durch lineare Gleichungen von der Form dargestellt:

$$\begin{aligned} x &= a_1 x' + b_1 y' + c_1 z' \\ y &= a_2 x' + b_2 y' + c_2 z' \\ z &= a_3 x' + b_3 y' + c_3 z' \end{aligned} \qquad 3)$$

wo die neun Coefficienten irgend welche gegebenen Grössen sein können, nur dass ihre Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

nicht $= 0$ sein darf, weil sonst die Transformation nicht umkehrbar ist. Bezeichnet man, wie früher, die Unterdeterminante von Δ mit A_1, A_2 etc., so werden diese Umkehrungen

$$\begin{aligned} \Delta \cdot x' &= A_1 x + A_2 y + A_3 z \\ \Delta \cdot y' &= B_1 x + B_2 y + B_3 z \\ \Delta \cdot z' &= C_1 x + C_2 y + C_3 z. \end{aligned} \qquad \textbf{3')}$$

(Der Faktor Δ spielt hier gar keine Rolle, da es nur auf die Verhältnisse $x : y : z$ und $x' : y' : z'$ ankommt.)

Gesetzt der Punkt $P(x, y, z)$ in E_1 beschreibe eine Linie mit den Koordinaten u, v, w oder eine Linie mit der Gleichung:

$$ux + vy + wz = 0.$$

Durch Anwendung von 3) verwandelt sich dieselbe in:

$$\begin{aligned} (a_1 u + a_2 v + a_3 w)x' + (b_1 u + b_2 v + b_3 w)y' \\ + (c_1 u + c_2 v + c_3 w)z' = 0, \end{aligned}$$

d. h. der Punkt Q beschreibt auch eine gerade Linie[1]) mit den Koordinaten:

$$\begin{aligned} u' &= a_1 u + a_2 v + a_3 w \\ v' &= b_1 u + b_2 v + b_3 w \\ w' &= c_1 u + c_2 v + c_3 w. \end{aligned} \qquad \textbf{3a)}$$

Wie man sieht, ist auch die Transformation der Linienkoordinaten vom ersten Grade. Daher wird durch collineare Transformation weder die Ordnung, noch die Klasse einer Kurve verändert, im besonderen also verwandeln sich Kegelschnitte wieder in Kegelschnitte.

Man nehme in E_2 irgend zwei Punkte $P'_1 (x'_1, y'_1, z'_1)$ und $P'_2 (x'_2, y'_2, z'_2)$ an und bestimme nach 3) die entsprechenden Punkte $P_1 (x_1, y_1, z_1)$ und $P_2 (x_2, y_2, z_2)$ in E_1. Dann wird nach § 21 ein beliebiger Punkt der Geraden durch P'_1 und P'_2 vermittelst der Formeln:

$$x' = x'_1 + \lambda x'_2, \quad y' = y'_1 + \lambda y'_2, \quad z' = z'_1 + \lambda z'_2$$

gegeben und durch Einsetzen in 3) folgen für den entsprechenden Punkt die analogen Formeln:

---

[1]) Daher die Bezeichnung „Collinear“.

$$x = x_1 + \lambda x_2, \quad y = y_1 + \lambda y_2, \quad z = z_1 + \lambda z_2$$

mit demselben Parameter λ.

Beschreibt daher P eine Punktreihe, so beschreibt P' eine projektivische Punktreihe und ebenso wird bewiesen, dass Strahlenbüschel projektivisch aufeinander abgebildet werden.

Nunmehr kann endlich auch die wiederholt angedeutete Trennung zwischen metrischen und projektivischen Eigenschaften von geometrischen Gestalten scharf ausgesprochen werden. Projektivisch heisst eine Eigenschaft, wenn sie bei jeder collinearen Transformation erhalten bleibt, metrisch dagegen, wenn sie dabei verloren gehen kann. Eine projektivische Eigenschaft ist in diesem Sinne invariant, eine metrische niemals.

Daher ist das Doppelverhältniss zwischen vier Punkten einer geraden Linie und ebenso zwischen vier Strahlen eines Büschels ein projektivischer Begriff. Projektivisch sind ferner das Liegen eines Punktes in einer Geraden, das Berühren und Schneiden von Kurven, der Pascal'sche und Brianchon-sche Satz, die harmonischen Eigenschaften der vollständigen Vierseite und Vierecke u. s. w. Metrisch dagegen ist die Entfernung zweier Punkte, der Abstand zwischen Punkt und Gerader, der Winkel zwischen zwei Geraden, das einfache Verhältniss zwischen drei Punkten einer Geraden, der Flächeninhalt eines Dreiecks oder irgend einer anderen geometrischen Figur u. s. w.

Dass projektivische Ausdrücke, wie z. B. der Ausdruck für das Doppelverhältniss, zuletzt metrische Grössen enthalten müssen, ist selbstverständlich, da die analytische Geometrie auf metrischer Grundlage aufgebaut ist. An und für sich ist eben die Geometrie metrisch und wird es immer bleiben. Entfernung und Winkel werden stets ihre Grundbegriffe sein; es giebt aber in ihr ein gewaltig grosses Gebiet, die reine projektive Geometrie oder Geometrie der Lage, welche von vornherein auf den Gebrauch metrischer Begriffe verzichtet und sich in bewussten Gegensatz zu jeder metrischen Geometrie setzt. Hier giebt es keine Entfernung, keinen Winkel, keine unendlich fernen Punkte, es fällt der Unterschied zwischen Ellipse, Hyperbel, Parabel; auch Hauptachsen und Scheitel,

Brennpunkt und Leitlinie der Kegelschnitte werden bei Seite gelassen etc. Es bleiben nur harmonische und unharmonische Lage, Projektivität und Involution, Pol und Polare etc.

Der grosse Vorsprung projektiver Sätze liegt aber in der Allgemeinheit ihrer Geltung. Der Pascal'sche und der Brianchon'sche Satz, die projektivische Erzeugung, die Theorie von Pol und Polare, die Lehre von den Polardreiecken passen auf jeden Kegelschnitt und Unterschiede zeigen sich erst beim Uebergang in metrisches Gebiet. Der eigentliche Grund hierfür liegt in dem Umstande, dass sich, wie wir gleich sehen werden, jeder Kegelschnitt auf jeden anderen und noch dazu auf unendlich viele Arten collinear abbilden lässt.

Projektive Eigenschaften sind, wie oben erwähnt, auch metrisch, insofern man zu ihrem Ausdruck metrische Begriffe benutzt. Man kann aber auch umgekehrt aus metrischen Eigenschaften den in ihnen vorhandenen projektiven Kern herausschälen. Wir wollen dies nicht allgemein begründen, zumal zahlreiche Beispiele im einzelnen hier und dort angeführt wurden, so das einfache Verhältniss als besonderer Fall des Doppelverhältnisses, der Satz vom Peripheriewinkel als besonderer Fall der projektivischen Erzeugung von Kegelschnitten u. s. w.

Werden in den Transformationsformeln 3) der Collinearität rechtwinklige oder schiefwinklige, aber nicht homogene Koordinaten verwendet, so schreibe man x, y, x', y' für $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}$. Es folgt:

$$x = \frac{a_1x' + b_1y' + c_1}{a_3x' + b_3y' + c_3}$$
$$y = \frac{a_2x' + b_2y' + c_2}{a_3x' + b_3y' + c_3} \qquad 3'')$$

und wer sich mit Dreieckskoordinaten nicht befassen will, muss diese Gleichungen 3'') als analytischen Ausdruck collinearer Verwandtschaft nehmen. Ob man nun von 3) oder 3'') ausgeht, immer stehen 9 Coefficienten zur Verfügung, doch leuchtet ein, dass es nur auf deren Verhältnisse, also nur auf 8 Grössen ankommt, da man irgend einen Coefficienten (nur darf er nicht zufällig = 0 sein) = 1 machen kann, wenn man will.

Somit ist eine collineare Verwandtschaft im allgemeinen durch acht Bedingungen bestimmt. Giebt man zu einem gegebenen Punkt P der Ebene E_1 einen beliebigen Punkt P' von E_2 als Abbildung an, so sind in dieser Feststellung zwei Bedingungen vereinigt, da die Gleichungen 3″) dann zwei Bedingungen für die a, b, c geben. Man kann daher verlangen, dass irgend vier gegebene Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 von E_1 irgend vier gegebenen Punkten P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 in E_2 entsprechen.[1]) Soll dann zu einem beliebigen fünften Punkt P in E_1 der zugehörige Punkt P' in E_2 construirt werden, so verbinde man P mit irgend zwei der vier Punkte, z. B. P_1 und P_2 und übertrage nun die beiden Strahlenbüschel $P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4, P_1P$ und $P_2P_1, P_2P_3, P_2P_4, P_2P$ projektivisch auf E_2. Genau reciprok ist natürlich die Konstruktion entsprechender Geraden.

Satz: Man kann zwei Ebenen E_1 und E_2 stets so collinear aufeinander beziehen, dass irgend ein Kegelschnitt K in der Ebene E_1 auf irgend einen Kegelschnitt K' in der Ebene E_2 abgebildet wird und zwar so, dass irgend drei Punkten P_1, P_2, P_3 von K irgend drei Punkte P'_1, P'_2, P'_3 von K' entsprechen.

Zum Beweise ziehe man irgend einen vierten Punkt P_4 von K hinzu, suche den Punkt P'_4 von K' so auf, dass die beiden Doppelverhältnisse (P_1, P_2, P_3, P_4) und (P'_1, P'_2, P'_3, P'_4) einander gleich sind (§ 23) und lasse nun den vier Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 die vier Punkte P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 entsprechen, so ist, wie vorhin gezeigt, die Collinearität eindeutig bestimmt. Dann muss dem Kegelschnitt K zunächst ein Kegelschnitt in E_2 entsprechen, der durch P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 hindurchgeht. Dieser Kegelschnitt muss aber mit K' zusammenfallen, da nach § 23 durch vier gegebene Punkte nur ein Kegelschnitt hindurchgeht, für welchen das Doppelverhältniss dieser vier Punkte einen gegebenen Werth hat.[2])

---

[1]) Bei projektiven Punktreihen waren es drei.

[2]) Es mag hier bemerkt werden, dass irgend zwei Kurven 3ter oder $n$ter Ordnung, sobald $n > 2$ im allgemeinen nicht collinear aufeinander abgebildet werden können und es daher nicht gestattet ist, projektivische Eigenschaften einer ganz speciellen Kurve $n$ter Ordnung auf alle Kurven $n$ter Ordnung zu übertragen.

Wenn die beiden ebenen Gebilde E_1 und E_2 in ein und derselben Ebene, also ineinander liegen, so kann jeder Punkt der Ebene sowohl zu E_1 als auch zu E_2 gerechnet werden. Wie viele Punkte kommen dabei zur Deckung?

Um diese Frage zu beantworten, setze man voraus, dass E_1 und E_2 auf dasselbe Koordinatensystem bezogen seien, was an dem Bestehen der Gleichungen 3) nichts ändert. Die Deckung wird dann durch die Proportion $x:y:z = x':y':z'$ oder durch die Gleichungen

$$x = \lambda x', \; y = \lambda y', \; z = \lambda z'$$

gegeben. Aus ihnen folgt durch Einsetzen in 3):

$$\begin{aligned} (a_1 - \lambda)\, x' + b_1 y' + c_1 z' &= 0 \\ a_2 x' + (b_2 - \lambda)\, y' + c_2 z' &= 0 \\ a_3 x' + b_3 y' + (c_3 - \lambda)\, z' &= 0. \end{aligned} \qquad 4)$$

Durch Elimination von $x':y':z'$ entspringt hieraus die kubische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2 - \lambda, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad 5)$$

Jedem Werth von λ entspricht im allgemeinen ein Punkt der Deckung, d. h. ein Punkt von E_1, der mit dem entsprechenden von E_2 zusammenfällt. Also:

Werden zwei collineare Gebilde in dieselbe Ebene gelegt, so fallen im allgemeinen drei Punkte zusammen (zwei können imaginär werden). Ebenso fallen auch drei Gerade zusammen, nämlich die drei Verbindungslinien dieser drei Punkte.

Geht z. B. die Collinearität in Congruenz über, so fallen zwei dieser Punkte mit den imaginären unendlich fernen Kreispunkten zusammen, während der dritte Punkt im allgemeinen nicht unendlich fern liegt. Dies giebt den berühmten Satz von Euler:

Man kann ein ebenes Gebilde aus einer Lage in eine andere durch eine einzige Drehung um einen Punkt überführen. Liegt dieser Punkt unendlich fern, so geht die Drehung in eine Parallverschiebung oder Translation über.

Ferner folgt auch noch, dass man einen Kegelschnitt stets auf sich selbst collinear beziehen kann und zwar so, dass irgend drei Punkten irgend drei andere Punkte ent-

sprechen. Ein ganz besonderer Fall einer solchen Verwandtschaft ist die Congruenz, da sie auf Drehung um einen Punkt zurückgeführt werden kann, wobei alle Kreise um diesen Punkt als Mittelpunkt in sich selbst gedreht werden.

Wenn die drei Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 der Gleichung 5) verschieden (und reell) sind, so sind auch die drei Punkte der Deckung P_1, P_2, P_3 von einander verschieden. Werden sie zu Ecken des Koordinatendreiecks gemacht, so vereinfachen sich die Definitionsgleichungen 3) für die Collinearität in:

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x' \\ y &= \lambda_2 y' \\ z &= \lambda_3 z'. \end{aligned} \qquad \textbf{6)}$$

Wenn zwei Wurzeln, etwa λ_1 und λ_2 einander gleich sind, so fallen im allgemeinen die Punkte P_1 und P_2 zusammen und die Darstellung 6) ist nicht möglich. Wenn aber dann die drei Gleichungen 4) für $\lambda_1 = \lambda_2$ sich auf eine einzige Gleichung reduciren sollten, so ist wieder die einfache Form 6) auf unzählig viele Weise zu erreichen. Denn da P_1 und P_2 nunmehr nur der einen Bedingung genügen müssen, auf der einen, durch die Gleichungen 4) bestimmten Geraden zu liegen, so können sie irgendwo auf derselben angenommen werden, worauf sich die Gleichungen 6) in

$$\begin{aligned} x &= \lambda x' \\ y &= \lambda y' \\ z &= \mu z' \end{aligned} \qquad \textbf{6a)}$$

verwandeln, wenn noch zur besseren Unterscheidung die beiden gleichen Wurzeln mit λ und die dritte Wurzel mit μ bezeichnet worden ist.

Die Gleichungen 6a) geben eine perspektivische Lage der beiden collinearen Gebilde, d. h. eine Lage, bei welcher die Verbindungslinien entsprechender Punkte stets durch einen und denselben Punkt (hier der Punkt P_3), das Centrum der Perspektive hindurchgehen, während die Schnittpunkte entsprechender Geraden stets auf ein und derselben Geraden, der Achse der Perspektivität, hier der Linie P_1P_2 liegen. Denn erstens folgt aus den Gleichungen 6a):

$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}.$$

Liegt also $P(x, y, z)$ auf der durch den Punkt P_3 gehenden Geraden

$$ax + by = 0,$$

so liegt der Punkt $P'(x', y', z')$ auch auf ihr, womit die erste Angabe für die perspektivische Lage als hier erfüllt bewiesen ist. Aber auch die zweite Angabe ist sofort als richtig zu erweisen. Denn gesetzt, P beschreibe irgend eine Gerade

$$ax + by + cz = 0,$$

so beschreibt P' die Gerade

$$\lambda (ax' + by') + c\mu z' = 0,$$

beide Geraden gehen durch den Durchschnittspunkt der Linie $z = 0$ mit der Geraden $ax + by = 0$. q. e. d.

Anmerkung: Die perspektivische Lage zweier collinearer Gebilde E_1 und E_2 ist viel anschaulicher, wenn ihre Ebenen nicht in einander liegen, sondern irgend zwei von einander verschiedene Ebenen im Raume sind.

Man kann dann als Centrum der Perspektive irgend einen weder in E_1 noch in E_2 liegenden Punkt S im Raume wählen und durch das von S ausgehende „Strahlenbündel" E_1 auf E_2 abbilden. Augenscheinlich ist diese Abbildung collinear, denn jeder Geraden in E_1 entspricht eine Gerade in E_2. Beide Gerade schneiden sich übrigens hier in der Schnittlinie der beiden Ebenen E_1 und E_2, welche die „Achse" der Perspektivität vertritt. Dass umgekehrt irgend zwei collineare Gebilde E_1 und E_2 in eine derartige perspektivische Lage gebracht werden können, ist nicht schwer zu beweisen, wir wollen es aber, um zum Schluss zu kommen, als bewiesen annehmen. So ist die allgemeine Collinearität identisch mit auseinandergerissener Perspektivität zweier ebener Gebilde, genau so wie (nach § 3) Projektivität zweier Punktreihen als ursprünglich vorhandene, aber durch Verschiebung oder Drehung zerstörte Perspektivität angesehen werden kann.

Sind die aufeinander perspektivisch abzubildenden Ebenen parallel, so geht die Collinearität in Aehnlichkeit über, liegt aber das Centrum unendlich fern, d. h. wird die Centralperspektive in Parallelperspektive umgewandelt, so erzielt man die allgemeine Affinität. Die Congruenz endlich entsteht, wenn ausserdem noch die Ebenen E_1 und E_2 parallel liegen.

Der Architekt und der Ingenieur gebraucht hauptsächlich

Grundriss und Aufriss zur zeichnerischen Darstellung, weil er so die Maasse unmittelbar aus der Zeichnung entnehmen kann. Daneben aber kann er der allgemeinen Perspektive nicht entbehren, trotzdem sie durchaus nicht dazu geeignet ist, die Länge von Strecken, die Grösse von Winkeln, kurz metrische Verhältnisse wiederzugeben,[1]) sondern nur eine Totalansicht vermittelt. Offenbar entspricht dem Grundriss und Aufriss in der analytischen Geometrie das rechtwinklige Koordinatensystem mit seinen einfachen Formeln für Strecken, Winkel, Flächen u. s. w. Wo es aber auf die projektiven Eigenschaften ankommt, wo eine Art von Vogelschau über die Geometrie abgehalten werden soll, um den versteckten, weil äusserlich nicht unmittelbar erscheinenden) Zusammenhang und die projektive Abhängigkeit geometrischer Gebilde von einander zu finden, da ist das allgemeine Dreieckskoordinatensystem von Vortheil, trotzdem in ihm die (in diesem Buch übrigens gar nicht erst abgeleiteten) Formeln für Strecken, Winkel, Flächen etc., kurz für metrische Beziehungen sehr weitschweifig und unbeholfen sind.

Noch ist eine besondere Lage collinearer Gebilde in einander zu erwähnen, nämlich die involutorische. Sie entsteht, wenn in den Formeln 6a) $\mu = -\lambda$ gesetzt wird, worauf $\lambda = 1$ genommen werden kann, da es nur auf $x:y:z$ ankommt. Man erhält dann $x = x'$, $y = y'$, $z = -z'$.

Ist im besonderen die Linie $z = 0$ unendlich fern, so erhält man hieraus $x = -x'$, $y = -y'$, d. h. Symmetrie in Bezug auf den Anfangspunkt. Ist aber die y-Achse unendlich fern, und die x-Achse auf der z-Achse senkrecht, so folgt $x = x'$, $z = -z'$, d. h. Symmetrie in Bezug auf die x-Achse.

Ausser der collinearen Abbildung ebener Systeme, welche zugleich in jeder Hinsicht die einfachste und namentlich zur zeichnerischen Darstellung fast ausschliesslich verwendete ist, giebt es noch viele andere Abbildungen, die wegen besonderer Eigenschaften von Interesse sind.

[1]) Dass man sie auf Umwegen finden kann, wenn mehrere perspektivische Zeichnungen vorliegen, ist selbstverständlich und beruht darauf bekanntlich die Photogrammetrie.

Am bekanntesten von diesen ist die Kreisverwandtschaft, die folgendermaassen entsteht. Zu Grunde gelegt werde der Kreis:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Zwei conjugirte Pole $P(x, y)$ und $P'(x', y')$ erfüllen dann die Gleichung:

$$x \cdot x' + y \cdot y' - r^2 = 0.$$

Nun ordne man jedem Punkt $P(x, y)$ denjenigen conjugirten Pol $P'(x'y')$ zu, der mit ihm auf demselben Radius des Kreises, beziehungsweise dessen Verlängerung liegt, so dass zu der vorigen Gleichung noch die folgende tritt:

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'},$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$x = \frac{r^2 \cdot x'}{x'^2 + y'^2} \quad y = \frac{r^2 \cdot y'}{x'^2 + y'^2} \qquad 7)$$

und umgekehrt:

$$x' = \frac{r^2 \cdot x}{x^2 + y^2} \quad y' = \frac{r^2 \cdot y}{x^2 + y^2}. \qquad 7')$$

Man sieht daher in 7) und 7') den involutorischen Charakter dieser Verwandtschaft analytisch ausgedrückt und es ist noch zu bemerken, dass jeder Punkt des Grundkreises sich selbst entspricht. Bezeichnet man mit ϱ und ϱ' die Abstände der beiden Punkte vom Mittelpunkt, so folgt aus 7) oder 7') sofort:

$$\varrho \cdot \varrho' = r^2,$$

weshalb die Abbildung auch als eine solche nach dem Prinzip der reciproken Radienvektoren bezeichnet wird. Sie hat die besondere Eigenthümlichkeit, dass aus Kreisen wieder Kreise werden, denn lässt man P irgend einen Kreis beschreiben:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0,$$

so ergiebt sich durch Einsetzen von 7) und nachfolgender Multiplikation mit $x'^2 + y'^2$:

$$\frac{p}{r^2}(x'^2 + y'^2) + mx' + ny' + r^2 = 0.$$

Lässt man aber P einen unendlich kleinen Kreis beschreiben, so beschreibt P' auch einen unendlich kleinen Kreis. Die Abbildung ist daher in den kleinsten Theilen ähnlich. Sie hat vielfach Anwendung gefunden, so im besonderen in der Theorie der complexen Funktionen (wobei allerdings noch ein „Umlegen“ stattfinden muss).

Merkwürdig ist, dass hier sowohl die Abbildung von P zu P' als auch umgekehrt die Abbildung von P' zu P rational, also eindeutig werden (ausgenommen wenn P oder P' im Anfangspunkt liegen), trotzdem sie wegen des Nenners $x^2 + y^2$ oder $x'^2 + y'^2$ vom zweiten Grade sind. Derartige beiderseits eindeutige Verwandtschaften höheren Grades nennt man allgemein Cremona'sche, weil dieser Mathematiker sie zuerst eingehend untersucht hat. Eine solche Cremona'sche Verwandtschaft giebt z. B. auch die Theorie conjugirter Pole in Bezug auf ein Kegeschnittbüschel (§ 25).

Der Collinearität steht die reciproke Verwandtschaft, die wir als Theorie von Pol und Polare schon in einem besonderen Falle kennen gelernt haben, dualistisch gegenüber. Sie entsteht, wenn jedem Punkt $P(x, y, z)$ der Ebene E eine Linie $l'(u', v', w')$ der Ebene E' so entspricht, dass die Koordinaten u', v', w' aus den Koordinaten x, y, z durch eine lineare Transformation:

$$\begin{aligned} u' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ v' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ w' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned} \qquad 8)$$

entstehen. Wird auf $l'(u', v', w')$ irgend ein Punkt $P'(x', y', z')$ angenommen, was durch die Gleichung:

$$u'x' + v'y' + w'z' = 0$$

ausgedrückt wird und setzt man hier die Formeln 8) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} (a_1 x + b_1 y + c_1 z)\, x' + (a_2 x + b_2 y + c_2 z)\, y' \\ + (a_3 x + b_3 y + c_3 z)\, z' = 0 \end{aligned} \qquad 9)$$

oder auch:

$$\begin{aligned} (a_1 x' + a_2 y' + a_3 z')\, x + (b_1 x' + b_2 y' + b_3 z')\, y \\ + (c_1 x' + c_2 y' + c_3 z')\, z = 0. \end{aligned} \qquad 9)$$

Wird $P'(x', y', z')$ als fest betrachtet, während $l'(u', v', w')$ sich um P' dreht, so beschreibt nach 9) der zugehörige Punkt $P(x, y, z)$ eine gerade Linie $l\ (u, v, w)$, deren Koordinaten u, v, w durch die Gleichungen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} u &= a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' \\ v &= b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' \\ w &= c_1 x' + c_2 y' + c_3 z'. \end{aligned} \qquad 8a)$$

Werden die beiden ebenen Systeme E und E' in eine einzige Ebene hineingelegt, so kann man auch die beiden Koordinatensysteme zusammenfallen lassen. Einem Punkt entsprechen dann nach 8) und 8a) zwei gerade Linien, je nachdem er zu E oder zu E' gezählt wird. Ist aber im besonderen:

$$b_1 = a_2, \ c_1 = a_3, \ c_2 = b_3,$$

so fallen diese beiden Geraden zu einer einzigen zusammen und die reciproke Verwandtschaft wird polar. In der That setze man in diesem Falle unter Einführung zweier Indices:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{11}, \ c_2 = b_3 = a_{23} \\ b_2 &= a_{22}, \ c_1 = a_3 = a_{31} \\ c_3 &= a_{33}, \ b_1 = a_2 = a_{12} \end{aligned}$$

und schreibe in 8) statt u', v', w' einfach u, v, w oder in 8a) statt x', y', z' einfach x, y, z, so folgt:

$$\begin{aligned} u &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ v &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ w &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned}$$

womit die Definitionsgleichungen 3) § 22 aus der Theorie von Pol und Polare wieder gefunden worden sind. (Im übrigen noch die Bemerkung, dass die allgemeinere Reciprocität umgekehrt angesehen werden kann, als ursprünglich vorhandene Polarität, da man zwei reciprok auf einander bezogene ebene Systeme stets so in einander legen kann, dass sie nun polar auf einander bezogen werden.)

Die reciproke Verwandtschaft, nach welcher einem Punkte stets eine gerade Linie und einer geraden Linie stets ein Punkt entspricht, lässt sich im hohen Grade verallgemeinern, wenn man die Gleichung 9) zu Grunde legt. Setzt man der Einfachheit wegen rechtwinklige Koordinaten voraus, so nehme man statt dieser Gleichung irgend eine Gleichung von der Form:

$$F(x, y, x', y') = 0, \qquad \textbf{10)}$$

d. h. eine Gleichung zwischen den Koordinaten zweier Punkte $P(x, y)$ und $P'(x', y')$, die einander entsprechen sollen. Dann liegen, wenn $P(x, y)$ gegeben ist, alle ihm entsprechenden Punkte auf der durch Gleichung 10) dargestellten Kurve, wenn in ihr x' und y' als Veränderliche betrachtet werden, während dieselbe Gleichung umgekehrt, wenn $P'(x', y')$ gegeben ist, den geometrischen Ort für $P(x, y)$ ergiebt. So entsteht

eine Verwandtschaft in der Weise, dass jedem Punkte von E eine Kurve von E' und umgekehrt jedem Punkte von E' eine Kurve von E entspricht.

Verwandtschaften dieser Art spielen in der höheren Mathematik und auch in den Naturwissenschaften eine sehr wichtige Rolle. Setzt man z. B. die Gleichung 10) in der Form voraus:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 - r^2 = 0 \qquad \mathbf{10\,a)}$$

und nimmt ausserdem an, dass E und E' ineinander liegen und auf dasselbe Koordinatensystem bezogen seien, so besagt die Gleichung 10 a), dass Punkte dann einander entsprechen sollen, wenn sie einen gegebenen Abstand $= r$ haben. Bleibt $P'(x', y')$ fest, so beschreibt $P(x, y)$ einen zu P concentrischen Kreis mit r als Radius, bewegt sich aber $P'(x', y')$ auf irgend einer Kurve, so umhüllen sämmtliche in dieser Weise erhaltenen Kreise eine andere Kurve (welche eine Parallelkurve der ersteren genannt wird), genau so wie bei der polaren Verwandtschaft die Polaren. Bekanntlich führt das berühmte Huyghens'sche Prinzip, nach welchem jeder Punkt einer Lichtwelle als Erreger einer neuen Welle anzusehen ist, während die eigentliche fortschreitende Welle als Einhüllende all dieser Einzelwellen aufgefasst werden soll, auf die durch 10 a) dargestellte geometrische Verwandtschaft (wenn das Medium optisch isotrop ist), wobei wohl kaum nöthig ist zu bemerken, dass beim Uebergang von der Ebene zum Raum an Stelle der vorhin genannten Kreise Kugeln treten müssen. Aber auch allgemeine, durch die Gleichung 10) dargestellte Beziehungen haben seit Monge in der Geometrie, namentlich aber in der Theorie der Differentialgleichungen, vor allem der partiellen Differentialgleichungen, eine hervorragende Rolle gespielt.

Schliesslich mag noch eine letzte Art geometrischer Verwandtschaft zwischen ebenen Systemen ihrer Anwendungen wegen kurz erwähnt werden. Es kann nämlich sein, dass irgend eine Schaar von Kurven der Ebene E und irgend eine andere Schaar von Kurven in der Ebene E' aufeinander bezogen seien und dass dann jeder Kurve der ersten Schaar eine Kurve der anderen und umgekehrt zugeordnet werden soll, ohne ein unmittelbares Entsprechen von Punkt zu Punkt.

Solche Verwandtschaften bilden, wenn man in aller Strenge zu Werke geht, die Grundlage der geometrischen Optik, da hier einer geraden Linie (irgend einem Lichtstrahl vor der Brechung oder Spiegelung) wieder eine gerade Linie (nämlich derselbe Lichtstrahl nach der Brechung oder Spiegelung) entspricht. Es ist bekannt genug, dass sich die von einem Punkt ausgehenden Strahlen nach der Brechung oder nach der Spiegelung im allgemeinen nicht wieder in einem Punkte vereinigen und daher hat es die Optik eigentlich gar nicht mit der Abbildung vom Gegenstand auf sein Bild, sondern mit der Transformation von Lichtstrahlen zu thun, aus der dann erst das mit dem Standpunkt des Beschauers wechselnde Bild zu construiren ist. Nur in ganz besonderen Fällen wird die Verwandtschaft in eine solche von Punkt zu Punkt, von leuchtendem zum Bildpunkt verwandelt, so z. B., wenn es sich um eine Spiegelung in einem ebenen Spiegel handelt, weil hier das Bild eine vom Auge des Beobachters ganz unabhängige Lage besitzt. Wenn aber trotzdem die geometrische Optik meist in der Lage ist, statt der Verwandtschaft von Strahl zu Strahl eine solche von Punkt zu Punkt zu setzen, so verdankt sie es dem Umstande, dass es sich bei ihren praktischen Aufgaben (Fernrohre, Mikroskope) meist nur um Achsenstrahlen handelt, d. h. um Strahlen, die der optischen Achse sehr nahe laufen. Denn hier wird die Verwandtschaft mit grosser Annäherung „collinear", da unter dieser Einschränkung die von einem Punkt ausgehenden Strahlen wieder in einem Punkt zusammentreffen.

Diese Beispiele, denen sich noch viele andere, so aus der Theorie der elastischen Deformationen und aus der darstellenden Geometrie anreihen liessen, beweisen vollauf die praktische Bedeutung der hier in ihren ersten Grundzügen entwickelten Theorie der geometrischen Verwandtschaften.

Aufgaben.

1. Ein gegebenes Viereck $ABCD$ soll als perspektivisches Abbild eines Schachbretts angesehen werden. Es sind die 64 Felder hineinzuzeichnen und zwar durch lineare Konstruktionen, d. h. ohne Anwendung des Zirkels.

2. Gegeben der Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Es sollen alle collinearen Transformationen gefunden werden, durch welche dieser Kreis in „sich selbst" abgebildet wird.

3. Durch eine Drehung um einen Punkt werden alle Kreise um diesen Punkt als Mittelpunkt in sich selbst abgebildet. Es ist nachzuweisen, dass allgemeiner jede collineare Verwandtschaft alle Kegelschnitte eines Kegelschnittbüschels in sich selbst abbildet, wenn man überhaupt nur einen einzigen nicht zerfallenden Kegelschnitt angeben kann, bei dem dies der Fall ist.

Anhang.

Lösungen zu den Uebungsaufgaben.

§ 1.

1. P_1 Anfangspunkt, so $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0, +10, -9, -3, -1$. Werden nacheinander P_2, P_3, P_4, P_5 zum Anfangspunkt, so hat man zu diesen Abscissen der Reihe nach $-10, +9, +3, +1$ zu addiren und erhält so:

$$-10,\ 0,\ -19,\ -13,\ -11;\ +9,\ +19,\ 0,\ +6,\ +8;$$
$$+3,\ +13,\ -6,\ 0,\ +2;\ +1,\ +11,\ -8,\ -2,\ 0.$$

2. $x = +6{,}075$.

3. Die Doppelverhältnisse werden der Reihe nach [11) § 1]:
$$-\frac{51}{40},\ +\frac{91}{51},\ +\frac{40}{91},\ -\frac{40}{51},\ +\frac{51}{91},\ +\frac{91}{40}.$$

4. a) $x'_1 = +\frac{74}{7}$, $x'_2 = +\frac{1}{8}$, $x'_3 = +\frac{76}{23}$. Geht man nun von diesen Punkten aus, so erhält man die drei gegebenen Punkte $x_1 = +2$, $x_2 = +5$, $x_3 = -8$ zurück.

   b) Der allgemein giltige Beweis erfordert, dass man aus den drei Gleichungen I):

$$\text{I)}\quad \begin{aligned} (x_1 - x_2)(x'_1 - x_3) + (x_1 - x_3)(x'_1 - x_2) &= 0 \\ (x_2 - x_3)(x'_2 - x_1) + (x_2 - x_1)(x'_2 - x_3) &= 0 \\ (x_3 - x_1)(x'_3 - x_2) + (x_3 - x_2)(x'_3 - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{I')}\quad \begin{aligned} (x'_1 - x'_2)(x_1 - x'_3) + (x'_1 - x'_3)(x_1 - x'_2) &= 0 \\ (x'_2 - x'_3)(x_2 - x'_1) + (x'_2 - x'_1)(x_2 - x'_3) &= 0 \\ (x'_3 - x'_1)(x_3 - x'_2) + (x'_3 - x'_2)(x_3 - x'_1) &= 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen I') ableite, was a priori sehr schwer, a posteriori aber, d. h. wenn die Gleichungen I') nur „bewiesen" werden sollen, schon leichter ist.

Man berechne aus I):

$$x'_1 = \frac{-2x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2}{2x_1 - x_2 - x_3}$$

u. s. w., setze in I') ein (umsichtig rechnen!) so erhält man in der That zuletzt identisch $0 = 0$.

§ 2.

1. l_1, l_2, l_3, l_4 bilden jeder mit dem folgenden einen Winkel $= 36^0$. Daher:

$$(l_1, l_2, l_3, l_4) = \frac{\sin 72^0 \cdot \sin 72^0}{\sin 36^0 \cdot \sin 108^0} = 2 \cdot \cos 36^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Nach 11) § 1 also die 6 Werthe:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad -\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

2. Man nehme den gemeinsamen Schenkel beider Theile als Anfangsrichtung, $m_1 = 0$, $m_2 = +1$, $m_3 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Hieraus $m_4 = -(\sqrt{3}+1) = \operatorname{tg} \varphi_4$; $\varphi_4 = -69^0\ 53{,}7'$.

3. Man erhält:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \frac{\varphi}{3}} = +\frac{1}{2},$$

also entweder $\sin \frac{\varphi}{3} = 0$, d. h. die vier Strahlen fallen zusammen, oder $\cos \frac{\varphi}{3} = \pm \sqrt{\frac{3}{8}}$.

$$\frac{\varphi}{3} = \pm 52^0\ 14{,}3' \pm k\pi.$$

4. Eines der 6 Doppelverhältnise $= \left(\frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}\right)^2$

5. Man gehe von dem Ausdruck Seite 30 aus:

$$(l_1, l_2, l_3, l_4) = \pm \frac{\Delta_1 \cdot \Delta'_2}{\Delta_2 \cdot \Delta'_1},$$

multiplicire im Zähler und Nenner mit den Seiten der zugehörigen Dreiecke, so folgt sofort der Satz.

§ 3.

1. $x_4 = + 9,2$, Verschwindepunkt $x = + 81,3$.

2. Strich	1,00	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90
Abscissen	0,00	4,38	8,84	13,40	18,05	22,80	27,65	32,60	37,67	42,84	48,13
1. Differenz		4,38	4,46	4,56	4,65	4,75	4,85	4,95	5,07	5,17	5,29
2. Differenz			8	10	9	10	10	10	12	10	12

Strich	0,90	0,89	0,88	0,87	0,86	0,85	0,84	0,83	0,82	0,81	0,80
Abscissen	48,13	53,54	59,07	64,73	70,52	76,44	82,52	88,73	95,10	101,62	108,31
1. Differenz		5,41	5,53	5,66	5,79	5,92	6,08	6,21	6,37	6,52	6,69
2. Differenz		12	12	13	13	13	16	13	16	15	17

[Die Differenzen dienen zur Kontrole. Sie müssen „laufen". Dass die zweiten Differenzen nicht mehr gut laufen, liegt an der Abrundung, welche die Abscissen um eine halbe Einheit, die ersten Differenzen um eine ganze Einheit, die zweiten Differenzen um zwei ganze Einheiten der letzten Stelle fälschen kann.]

3. Die Parallele durch die Spitze zur dritten Seite bildet mit den beiden anderen Seiten und der Mittellinie vier harmonische Strahlen. Hieraus $m = + 1,8558 \ldots$

4. Nennt man den gesuchten Richtungscoefficienten x, so gehören zusammen -1 und x; $+5$ und -4; $+3$ und ∞. Schneidet man das Viereck durch die unendlich ferne Gerade und projicirt von irgend einem Punkte, d. h. zieht durch ihn die $\|$ zu den Seiten, so entsteht nach Seite 48 eine Involutionsgruppe. Daher z. B.:

$(-1, +5, +3, \infty) = (x, -4, \infty, +3)$, hieraus $x = + 6,5$.

Hätte man den „auch" richtigen Ansatz gemacht:

$$(x, -1, -4, \infty) = (-1, x, +5, +3),$$

so würde man ausser dem richtigen Werth $x = + 6,5$ noch den falschen $x = -1$ erhalten haben. Weshalb?

§ 4.

1. $x = \frac{x' - y'}{2} \sqrt{2} + \frac{a}{2}, \quad y = \frac{x' + y'}{2} \sqrt{2} + \frac{a}{2}.$

2. $x = - x' - y' + a$, $x' = - x'' - y'' + a$, $x'' = - x - y + a$
$y = x'$, $y' = x''$, $y'' = x$.

3. φ soll der Centriwinkel im grossen Kreise sein, siehe Fig. 57:

$$x = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi + \frac{r}{2}\cos\varphi$$

$$y = - x' \sin\varphi + y' \cos\varphi + \frac{r}{2}\sin\varphi.$$

Bemerkung: (Diese Gleichungen sind für jeden Werth von x', y' zugleich eine Parameterdarstellung der beim Rollen beschriebenen Kurve (Ellipse). (Parameter φ).

§ 5.

1. $P_2P_3 = \sqrt{20}$, $P_3P_1 = \sqrt{26}$, $P_1P_2 = \sqrt{10}$, $\sphericalangle P_1 = 60^0\ 15{,}3'$, $\sphericalangle P_2 = 81^0\ 52{,}2'$, $\sphericalangle P_3 = 37^0\ 52{,}4'$.

Koordinaten des Schwerpunktes S: $x_4 = +3$, $y_4 = +2\frac{1}{3}$.

„ „ Höhendurchschnittes H: $x_5 = +\frac{15}{7}$, $y_5 = +\frac{23}{7}$.

„ „ Mittelpunktes M: $x_6 = +\frac{24}{7}$, $y_6 = +\frac{13}{7}$.

Bemerkung: Man findet $x_5 - x_4 = -2(x_6 - x_4)$, $y_5 - y_4 = -2(y_6 - y_4)$, also liegen H, S, M in gerader Linie und $HS = 2SM$.

2. $x_4 = x_1 + x_3 - x_2$, $y_4 = y_1 + y_3 - y_2$.

3. $x'_3 = x_3 + 2(y_2 - y_1)\cdot\frac{A}{B}$, $A = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3$

$y'_3 = y_3 - 2(x_2 - x_1)\cdot\frac{A}{B}$, $B = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

4. Die 6 Ecken sind:

$$P_1(+1, -2),\ P_2(0, +1),\ P_3\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}, +\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right),$$

$$P_4(-3\sqrt{3},\ 1 - \sqrt{3}),\ P_5(+1 - 3\sqrt{3},\ -2 - \sqrt{3}),$$

$$P_6\left(+\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}, -\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right),$$

$$\text{Mittelpunkt } M\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

§ 6.

1. Man findet sie am einfachsten durch „Probiren". Sie sind:

$$5x - 3y + 12 \text{ und } 2x + y - 7.$$

2. Nach Potenzen von y geordnet: $-3y^2 + y(-x + 33) + (10x^2 - 11x - 84) = 0$, hieraus:

$$y = \frac{33 - x \pm \sqrt{(33 - x)^2 + 120x^2 - 132x - 1008}}{6}$$

Die Wurzel geht auf, sie ist $= \pm (11x - 9)$.

3. Die Faktoren sind:

$$4x - 7y + 11 \text{ und } 3x - 4y + 3.$$

§ 7.

1. $\sqrt{(x - a)^2 + y - b)^2} + \sqrt{(x + a)^2 + (y + b)^2}$
$= \sqrt{(x - a)^2 + (y + b)^2} + \sqrt{(x + a)^2 + (y - b)^2}$.

Nach Fortschaffen der Wurzeln (umsichtig rechnen!) und Division mit $16ab$ sehr einfach

$$x \cdot y = 0,$$

d. h. der geometrische Ort besteht aus den beiden Koordinatenachsen, wie man hinterher leicht bestätigt.

2. Nach Einführung des laufenden Punktes P sind Richtungscoefficienten m_1 und m_2 von PP_1 und $PP_2 = \frac{y + 2}{x - 1}$ und $\frac{y - 1}{x + 3}$, daher nach 3) § 2:

$$1 = \frac{\frac{y - 1}{x + 3} - \frac{y + 2}{x - 1}}{1 + \frac{y + 2}{x - 1} \cdot \frac{y - 1}{x + 3}}$$

und hieraus nach Reduktion:

$$x^2 + y^2 + 5x + 5y = 0,$$

also (§ 12) Kreis mit dem Mittelpunkt $M\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ und Radius $r = \frac{5}{2}\sqrt{2}$.

3. Verbindungslinie F_1F_2 zur x-Achse, Mittelsenkrechte y-Achse, so Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Polargleichung wird sehr einfach, nämlich:

$$r = e \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

4. Aufgabe nicht leicht, aber viel an ihr zu lernen. $P_1P_2P_3P_4$ Antiparallelogramm. Setze $P_1P_2 = P_3P_4 = 2e$, $P_2P_3 = P_4P_1 = 2a$, P_1P_2 fest, $P_1\,(+\,e, 0)$, $P_2\,(-\,e, 0)$, Mitte von $P_3P_4 : M(x, y)$. Man erhält:

$$\text{I)}\ (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 = 4e^2,\ \text{II)}\ (x_3 - e)^2 + y_3{}^2 = 4a^2,$$

$$\text{III)}\ (x_4 + e)^2 + y_4{}^2 = 4a^2,\ \text{IV)}\ x = \frac{x_3 + x_4}{2},\quad \text{V)}\ y = \frac{y_3 + y_4}{2}.$$

Nun x_3, x_4, y_3, y_4 zu eliminiren. Führe ein $\frac{x_4 - x_3}{2} = \xi$, $\frac{y_4 - y_3}{2} = \eta$, so

$$\text{I')}\ \xi^2 + \eta^2 = e^2,\ \text{II')}\ (x - \xi - e)^2 + (y - \eta)^2 = 4a^2,$$
$$\text{III')}\ (x + \xi + e)^2 + (y + \eta)^2 = 4a^2.$$

Jetzt noch ξ und η zu eliminiren. Aus II' und III' folgt:

$$\text{II'')}\ x(\xi + e) + y \cdot \eta = 0,\ \text{III'')}\ x^2 + y^2 + 2e(\xi + e) = 4a^2.$$

Aus III'') ξ, dann aus II'') η berechnet und in I') eingesetzt, so Endgleichung. Diese „muss“ aber einen überflüssigen Faktor haben. Denn alle bisherigen Gleichungen gelten für das Antiparallelogramm wie für das Parallelogramm selbst. Daher der Faktor noch zu trennen. Aus I' und II'') entweder $\xi + e = 0$, $\eta = 0$, also $x^2 + y^2 = 4a^2$ entspricht Parallelogramm oder

$$\text{I'')}\ x \cdot \eta - y(\xi - e) = 0\ \text{(Antiparallelogramm).}$$

Jetzt aus I''), II''), III'') ξ und η eliminirt, so Endgleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 - 4a^2x^2 - 4(a^2 - e^2)\,y^2 = 0.$$

(Zur Probe $a = e$, Kurve zerfällt in zwei Kreise (wieso). Für $a = \frac{e}{2}\sqrt{2}$ folgt:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) = 0,\ \text{also Lemniskate, Aufgabe 3).}$$

§ 8.

1. Setze den Nenner $= n$ und schreibe

$$nx - 3u + u^2 = 5,\ ny + 4u + 11u^2 = 6,\ n - 7u - u^2 = 2.$$

Betrachte n, u, u^2 als Unbekannte, berechne u, u^2 und setze $u^2 = (u)^2$. Es folgt:

$(73x - 10y - 37)(50x - 29y - 38) - (-28x + 7y + 49)^2 = 0$
oder:

$$2866x^2 - 2225xy + 241y^2 - 1880x + 767y - 995 = 0.$$

2. $\lambda = 0$ und $\lambda = 19{,}24$, daher $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$ oder $\frac{x^2}{5{,}76} - \frac{y^2}{10{,}24} - 1 = 0$.

3. $x = \frac{-5}{1+m}, \; y = \frac{1 - 5m - m^2}{1 + m}$.

§ 9.

1. $2x - 3y - 13 = 0; \; \frac{x}{\frac{13}{2}} + \frac{y}{-\frac{13}{3}} = 1; \; y = \frac{2}{3}x - \frac{13}{3};$

$$x = \frac{3}{2}y + \frac{13}{2}; \; \frac{2x}{\sqrt{13}} - \frac{3y}{\sqrt{13}} - \sqrt{13} = 0.$$

2. Die Gleichung sei $ax + by + c = 0$, die beiden Bedingungen:

$$2a - 3b + c = \pm 6\sqrt{a^2 + b^2}$$
$$5a - b + c = \pm 4\sqrt{a^2 + b^2}$$

giebt die beiden Linien:

$$y - 3 = 0, \; 12x - 5y - 117 = 0,$$

ausserdem noch zwei imaginäre Linien.

3. Gleichung sei: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0$, so $\frac{1}{p} + \frac{2}{q} - 1 = 0$, $pq = \pm 4$, hieraus:

$$\frac{x}{-1 \pm \sqrt{3}} + \frac{y}{-2 \mp 2\sqrt{3}} - 1 = 0 \text{ (zwei reelle Gerade)}$$

oder:

$$\frac{x}{1 \pm i} + \frac{y}{2(1 \mp i)} - 1 = 0 \text{ (zwei imaginäre Gerade).}$$

§ 10.

1. $\lambda = \pm \frac{4}{3\sqrt{7}}$.

2. Es muss für den gesuchten Strahl werden:

$$\frac{2 + 3\lambda}{3 - 2\mu} = \frac{-4 + 7\lambda}{4 - 7\mu} = \frac{\lambda}{5}$$

und hieraus $\lambda = -5$, $\mu = -5$. Die Gleichung daher:

$$13x + 39y + 5 = 0.$$

3. Die drei Diagonalen haben die Gleichungen:

$$a_1 U_1 + a_2 U_2 = 0,\ a_1 U_1 + a_3 U_3 = 0,\ a_1 U_1 + a_4 U_4 = 0,$$

denn sie können vermöge der Identität auch so geschrieben werden:

$$a_3 U_3 + a_4 U_4 = 0,\ a_2 U_2 + a_4 U_4 = 0,\ a_2 U_2 + a_3 U_3 = 0.$$

§ 11.

1. Es soll sein $p \cdot q = 2\Delta$, also $u \cdot v = \frac{1}{2\Delta}$.
Dies ist die Tangentengleichung. Die Punktgleichung wird:

$$xy = \frac{\Delta}{2}.$$

(Asymptotengleichung der gleichseitigen Hyperbel (§ 16, S. 199).

2. Es soll sein: $p + q + \sqrt{p^2 + q^2} = 2s$, d. h. $2s^2 - 2sp - 2sq + pq = 0$ oder:

$$2s^2uv + 2su + 2sv + 1 = 0.$$

Dies die Tangentengleichung. Die Verwandlung in Punktgleichung giebt:

$$x^2 + y^2 - 2sx - 2sy + s^2 = 0$$

(Gleichung eines Kreises, der x- und y-Achse berührt, § 12).

3. Nach 8b Seite 131 lauten die Transformationsformeln:

$$u' = \frac{u}{2u + 3v + 1},\ v' = \frac{v}{2u + 3v + 1},$$

oder: $u = \frac{u'}{-2u' - 3v' + 1}$, $v = \frac{v'}{-2u' - 3v' + 1}$.

Die neue Gleichung wird:

$$u'^2 + 10u'v' + 14v'^2 - 2u' - 8v' + 1 = 0.$$

§ 12.

1. $x^2 + y^2 - \frac{27}{7}x - \frac{5}{7}y - \frac{52}{7} = 0$ $M\left(+\frac{27}{14}, +\frac{5}{14}\right)$, $r = \frac{\sqrt{2210}}{14}$.

2. Das Kreisbüschel ist: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 + \lambda(x - y - 7) = 0$.

Für den verlangten Kreis $\lambda = -\frac{8}{5}$; $\left[M\left(+\frac{19}{5}, -\frac{14}{5}\right),\right.$ $\left. r = \frac{\sqrt{352}}{5}\right]$.

3. Man erhält für x die Gleichung vierten Grades:

$x^4 - 24q^2x^2 + 64q^3x - 48q^4 = 0$. Setze $x = 2q \cdot z$, so:

$z^4 - 6z^2 + 8z - 3 = 0$ mit den Wurzeln $z_1 = z_2 = z_3 = 1$, $z_4 = -3$, also:

$x_1 = x_2 = x_3 = 2q$, $x_4 = -6q$, $y_1 = y_2 = y_3 = 2q$, $y_4 = 18q$, d. h. der Kreis ist Krümmungskreis an die Parabel im Punkte $(2q, 2q)$. Er schneidet die Parabel noch im Punkte $(-6q, 18q)$.

§ 13.

1. $a = \frac{1}{2}\sqrt{70}$, $b = \frac{1}{3}\sqrt{105}$.

2. $x = \frac{2au}{1+u^2}$, $y = \pm b \cdot \frac{1-u^2}{1+u^2}$.

3. Es sei m der Richtungscoefficient der Sehne, x_1, x_2 Abscissen von Schnittpunkten P_1 und P_2, $P_2F = 2FP_1$. Daher:

1) $x_2 - e = 2(e - x_1)$.

Da andererseits die Brennstrahlen sich verhalten wie die Lote auf die Leitlinie, so:

2) $x_2 - \frac{a^2}{e} = 2\left(x_1 - \frac{a^2}{e}\right)$.

Aus 1) und 2): Da $a^2 = \frac{e^2}{2}$, $x_2 = \frac{10}{8}e$, $x_1 = \frac{7}{8}e$, hieraus

$$r_1 = \frac{e}{a}x_1 - a = \frac{3}{8}\frac{e^2}{a},\ r_2 = \frac{e}{a}x_2 - a = \frac{6}{8}\frac{e^2}{a}.$$

Daher endlich: $\cos\varphi = \frac{e - x_1}{r_1} = \frac{x_2 - e}{r_2} = \frac{1}{3}\frac{a}{e} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = \pm\frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}$, $m = \operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{17}$, $\varphi = \pm 76^\circ\, 22{,}0'$.

4. Das Lot ist = der halben Summe der von den Endpunkten der Sehne auf die Leitlinie gefällten Lote und jedes der letzteren = dem zugehörigen Theil der Sehne.

§ 14.

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$

2. $x^2 + y^2 - 2xx_0 \frac{e^2}{a^2} - b^2 + \frac{e^2}{a^2} x_0^2 = 0,$ oder auch:

$$b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{e^2}{a^2} (x - x_0)^2 = 0,$$

woraus hervorgeht, dass die Schnittpunkte mit der Ellipse in der That durch die Gleichung $(x - x_0)^2 = 0$ bestimmt werden. Wenn $x_0 > a$, so kann der Kreis doch reell sein, trotzdem die Berührungspunkte imaginär.

3. Es seien die Gleichungen der beiden Kreise $U_1 \equiv x^2 + y^2 + m_1 x + p_1 = 0$, $U_2 \equiv x^2 + y^2 + m_2 x + p_2 = 0$. So wird die gesuchte Gleichung: $\sqrt{U_1} \pm \sqrt{U_2} = c$, oder nach Fortschaffen der Wurzeln:

$$(U_1 - U_2)^2 - 2c^2 (U_1 + U_2) + c^4 = 0.$$

Da $U_1 - U_2$ vom ersten Grade, so die Gleichung vom zweiten Grade. Sie enthält kein Glied mit xy und kein Glied mit y. Das Glied mit x kann, wenn nicht zufällig der Coefficient von $x^2 = 0$ (Parabel) durch Parallelverschiebung zum Verschwinden gebracht werden, worauf die Gleichung die Form annimmt:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma = 0$$

und also zur Mittelpunktsgleichung einer Ellipse oder Hyperbel wird. (Man zeige, dass sie von den beiden Kreisen berührt wird.)

4. Man führe die Sehne ein $y - y_0 = m (x - x_0)$, drücke die Mitte durch m aus und eliminire m. Es folgt:

$$\frac{\left(x - \frac{x_0}{2}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y - \frac{y_0}{2}\right)^2}{b^2} = \frac{x_0^2}{4a^2} + \frac{y_0^2}{4a^2}.$$

§ 15.

1. $m \cdot m_1 = \frac{y^2}{-x^2 + a^2} = \frac{x^2 - a^2}{-x^2 + a^2} = -1$, q. e. d.

2. Man ziehe zunächst irgend zwei gegen die x-Achse gleich geneigte Sehnen:

$$\text{I)}\ y - mx - q = 0, \qquad \text{II)}\ y + mx + q_1 = 0$$

so liegen die vier Durchschnittspunkte mit der Hyperbel:

$$\text{III)}\ x^2 - y^2 - a^2 = 0$$

auf dem Kreise mit der Gleichung:

$$(1 + m^2)(x^2 - y^2 - a^2) + 2(y - mx - q)(y + mx - q_1) = 0$$

oder:

$$(x^2 + y^2)(1 - m^2) - 2xm(q - q_1) - 2y(q + q_1) + \lambda = 0$$

(λ nicht berechnet).

Daher: Mittelpunkt $M\left(x_0 = \frac{m(q - q_1)}{1 - m^2},\ \ y_0 = \frac{q + q_1}{1 - m^2}\right)$, soll er auf der Sehne I liegen, so muss werden:

$$\frac{q + q_1}{1 - m^2} - \frac{m^2(q - q_1)}{1 - m^2} - q = 0, \text{ d. h. } q_1 = 0,$$

d. h. II) ist ein Durchmesser der Hyperbel, welchen Werth auch q hat, q. e. d.

(Offenbar ist Aufgabe 1 nur ein besonderer Fall von Aufgabe 2).

3. Es seien $(\pm x_0, y_0)$ die Koordinaten der beiden Berührungspunkte, so findet man ganz ähnlich wie in Aufgabe 2) § 14):

$$a^2\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \frac{e^2}{b^2}(y - y_0)^2 = 0$$

als Gleichung des Kreises. Für die Schnittpunkte mit den Asymptoten ist $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, daher:

$$a^2 = \frac{e^2}{b^2}(y - y_0)^2,\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} = \left\{ y_0 \pm \frac{ab}{e},\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = \pm \frac{b}{a} \right\} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}.$$

Die Sehne s daher:

$$s = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = (y_2 - y_1)\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$$

$$= \frac{2ab}{e}\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{b^2}} = 2a, \quad \text{q. e. d.}$$

§ 16.

1. a) Gegeben Parabel $y = \frac{x^2}{2p}$, Punkt $P(x, y)$ auf ihr. Schnittpunkt der Normale mit der Hauptachse $(0, y + p)$ und

daher der Punkt P' der Aufgabe ($x' = -x$, $y' = y + 2p$) womit der erste Theil bewiesen ist.

b) Ziehe durch $P(x, y)$ beliebige Sehne mit Richtungscoefficient m. Schneidet die Parabel noch in $Q(X, Y)$ so

$$X = 2pm - x,$$
$$Y = y + 2pm^2 - 2mx.$$

Daher Richtungscoefficient $\operatorname{tg}\varphi$ der Verbindungslinie QP':

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Y - y'}{X - x'} = \frac{m^2 - 1}{m} - \frac{x}{p}.$$

Dies giebt, wenn φ gegeben, eine quadratische Gleichung für m und man findet sofort

$$m_1 \cdot m_2 = -1, \text{ q. e. d.}$$

2. Es seien x_1, x_2, x_3 die Abscissen der Berührungspunkte, so $X \cdot x_1 - p(Y + y_1) = 0$ etc. Gleichungen der Tangenten l_1, l_2, l_3. Gleichung der Höhe auf l_3 daher:

$$(x_2 x_3 + p^2)(X \cdot x_1 - p(Y + y_1)) - (x_3 x_1 + p^2)(X \cdot x_2 - p(Y + y_2)) = 0,$$

oder da $y_1 = \frac{x_1^2}{2p}$, $y_2 = \frac{x_2^2}{2p}$ nach Division durch $p(x_1 - x_2)$:

$$Xp + Yx_3 - \frac{x_1 x_2 x_3}{2p} - \frac{px_1}{2} - \frac{px_2}{2} = 0.$$

Für Schnittpunkt mit Leitlinie ist $Y = -\frac{p}{2}$, daher:

$$X = \frac{x_1 x_2 x_3}{2p^2} + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}.$$

Da derselbe Werth für die andern Höhen, so Satz bewiesen.

3. $(\xi^2 + \eta^2)(a^2 + b^2) + 2\xi\eta(b^2 - a^2) - 2\sqrt{2}b^2\sqrt{a^2 + b^2}(\xi + \eta) + 2b^4 = 0$, oder auch:

$$((\xi + \eta)\sqrt{a^2 + b^2} - b^2\sqrt{2})^2 - 4\xi\eta a^2 = 0,$$

aus welcher Form sofort hervorgeht, dass $\xi = 0$, $\eta = 0$ Tangenten an die Ellipse.

§ 17.

1. $9x^2 - xy + 16y^2 - 72x - 96y + 144 = 0$, Ellipse M ($\alpha = +4\frac{4}{23}$, $\beta = +3\frac{3}{23}$) $a'_{33} = -\frac{3600}{23}$.

$$9x_1^2 - x_1y_1 + 16y_1^2 - \frac{3600}{23} = 0,\ \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{1}{7},\ 2\varphi = 8^0 7, 8',$$

$\varphi = 4^0 3, 9'$; $\varrho = -\sqrt{7^2 + 1^2} = -5 \cdot \sqrt{2}$, $a'_{11} = \frac{5}{2}(5 - \sqrt{2})$,

$a'_{22} = \frac{5}{2}(5 + \sqrt{2})$.

$$\frac{\xi^2}{\frac{7200}{115(5-\sqrt{2})}} + \frac{\eta^2}{\frac{7200}{115(5+\sqrt{2})}} = 1.$$

$a = \frac{12}{23}\sqrt{50 + \sqrt{200}}$ (liegt auf ξ-Achse),

$b = \frac{12}{23}\sqrt{50 - \sqrt{200}}$ (liegt auf η-Achse).

2. $48x^2 - 22xy - 48y^2 - 384x - 112y + 768 = 0$.

$$\alpha = +\frac{344}{97},\ \beta = -\frac{192}{97},\ a'_{33} = +\frac{19200}{97}.$$

$$48x_1^2 - 22x_1y_1 - 48y_1^2 + \frac{19200}{97} = 0.$$

$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{22}{96}$, $2\varphi = 167^0 5, 55'$, $\varphi = 83^0 32, 8'$, $\varrho = -10\sqrt{97}$,

$$a'_{11} = -5\sqrt{97},\ a'_{22} = +5\sqrt{97}.$$

$$\xi^2 - \eta^2 = \frac{3840}{97^2} \cdot \sqrt{97}.$$

$a = b = \frac{\sqrt{3840} \cdot \sqrt[4]{97}}{97}$ (reelle Achse liegt auf ξ).

§ 18.

1. Man erhält die beiden Gleichungen:
   a) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 72x - 96y + 144 = 0$,
   b) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 72x - 96y + 144 = 0$,

a) ist eine Doppellinie $(3x + 4y - 12)^2 = 0$ (Verbindungslinie von A und B), also keine eigentliche Parabel; bleibt also nur

b) $(3x - 4y)^2 - 24(3x + 4y) + 144 = 0$.

$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{4}{3}$, $\varphi = 126^0 52, 20'$. (Hauptachse parallel zur Verbindungslinie von O mit Mitte von AB).

$$\sin\varphi = +\frac{4}{5},\ \cos\varphi = -\frac{3}{5}.$$

$$25x_1{}^2 - 24\left(-\frac{24}{5}y_1 + \frac{7}{5}x_1\right) + 144 = 0.$$

$$y_1 = -\frac{720}{24^2} + \frac{168}{24^2}\cdot x_1 - \frac{125}{24^2}\cdot x_1{}^2.$$

$$x_1 = \xi + \alpha,\ y_1 = \eta + \beta,\ \alpha = +\frac{84}{125},\ \beta = -\frac{144}{125}.$$

Endgleichung: $\eta = -\dfrac{\xi^2}{2\cdot\dfrac{288}{125}}$, $p = \dfrac{288}{125}$ (Hauptachse hat Richtung von $-\eta$).

2. $\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0$, $\lambda = -\dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$, die Linienpaare sind:

$$\left(x - \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right)\left(y - \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right) = 0.$$

Eigentlich ist die Gleichung vom dritten Grade. Die dritte Wurzel $\lambda = \infty$ giebt:

$$(x + y - 5)\ (0x + 0y + 1) = 0.$$

3. Es seien x_1, y_1, x_2, y_2 die Schnittpunkte, so verlangte Gleichung:

$$\left(\frac{x\cdot x_1}{16} + \frac{y\cdot y_1}{9} - 1\right)\left(\frac{x\cdot x_2}{16} + \frac{y\cdot y_2}{9} - 1\right) = 0 \text{ oder:}$$

$$x^2\cdot\frac{x_1x_2}{256} + xy\cdot\frac{x_1y_2 + y_1x_2}{144} + y^2\cdot\frac{y_1y_2}{81} - x\cdot\frac{x_1 + x_2}{16}$$
$$- y\cdot\frac{y_1 + y_2}{9} + 1 = 0.$$

Für die Schnittpunkte findet man: $73x^2 - 320x + 256 = 0$, $x_1 + x_2 = +\dfrac{320}{73}$, $x_1x_2 = +\dfrac{256}{73}$.

Da $y_1 = 5 - 2x_1$, $y_2 = 5 - 2x_2$, so weiter $y_1 + y_2 = +\dfrac{90}{73}$, $y_1y_2 = -\dfrac{351}{73}$, $x_1y_2 + y_1x_2 = +\dfrac{576}{73}$ und nach Einsetzen:

$$3x^2 + 12xy - 13y^2 - 60x - 30y + 219 = 0.$$

Zur Probe berechne man Mittelpunkt dieser Kurve $\left(\alpha = +\dfrac{32}{5},\ \beta = +\dfrac{9}{5}\right)$ Schnittpunkt der Tangenten, zugleich Pol der Sekante (§ 22), so in der That:

$$a'_{33} = -30\alpha - 15\beta + 219 = 0.$$

§ 19.

1. Es sei $P_{\lambda\mu}$ Schnit von l_λ, l_μ. Man setze Doppelverhältniss:

$$(P_{1,2}\,P_{1,3}\,P_{1,4}\,P_{1,5}) = (1|2, 3, 4, 5) \text{ u. s. w.}$$

Betrachte l_1, l_2, l_3 als Dreieck, l_4, l_5 als Transversale, nehme Satz des Ptolemaeus und dividire. Es folgt:

a) $(1|, 2, 3, 4, 5) \times (2|, 3, 1, 4, 5) \times (3|, 1, 2, 4, 5) = 1.$

Da nun durch $(1|, 2, 3, 4, 5)$ alle sechs Doppelverhältnisse auf l_1 bestimmt sind (§ 1), so ist der Satz für l_1, l_2, l_3 also auch allgemein bewiesen.

2. Man mache den Ansatz:

b) $(1|, 2, 3, 4, 5) = (2|, 3, 4, 5, 1) = (3|, 4, 5, 1, 2)$
$= (4|, 5, 1, 2, 3) = (5|, 1, 2, 3, 4) = x.$

Nach $\alpha)$ $\beta)$ $\gamma)$ $\delta)$, 10) und 11) § 1 ist dann:

$$(2|, 3, 1, 4, 5) = \frac{1}{1-x}; \; (3|, 1, 2, 4, 5) = x,$$

also nach a):

$$\frac{x^2}{1-x} = 1, \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Prüft man die aus a) durch Permutation hervorgehenden Gleichungen, so wird man sie auch erfüllt finden.

3. Folgt sofort aus Aufgabe 1) § 2 durch Projektion der vier Strahlen auf die Gegenseite des Fünfeckes.

§ 20.

1. Man findet $(x_1 - x_2)\,(x_2 - x_3)\,(x_3 - x_1)$. Jede Determinante, deren erste Reihe durch die Elemente: $1 : x_1$, $x_1^2 \ldots x_1^{n-1}$ u. s. w., deren letzte Reihe also durch 1, x_n, $x_n^2, \ldots x_n^{n-1}$ gebildet wird, ist = dem Produkt aus sämmtlichen Differenzen der x. (Beweis durch Subtrahiren der ersten Reihe von den übrigen, Absondern der Faktoren $x_2 - x_1$, $x_3 - x_1$ … $x_n - x_1$ und Verwandeln in eine Determinante $n-1^{\text{ten}}$ Grades von derselben Form, Schliessen von $n-1$ auf n.)

2. Multiplicirt man alle Horizontalreihen einer schiefen Determinante mit (-1), so bleibt sie unverändert, da sich Horizontal- in Vertikalreihen verwandeln. Dabei wird die ganze Determinante mit $(-1)^n$ multiplicirt. Sie muss also, wenn n ungerade ist, identisch verschwinden. q. e. d.

3. Für $n = 2$ ist der Satz klar, da $\begin{vmatrix} o, & a \\ -a, & o \end{vmatrix} = (a)^2$.
Für $n = 4$, d. h.

$$\varDelta = \begin{vmatrix} o, & a, & b, & c \\ -a, & o, & d, & e \\ -b, & -d, & o, & f \\ -c, & -e, & -f, & o \end{vmatrix}$$

multiplicire man die letzte Vertikalreihe mit $-\frac{a}{c}, -\frac{b}{c}$ und addire zur zweiten und dritten. Nachher dasselbe Verfahren auf Horizontalreihen angewendet. Dann bleibt die Determinante schief, statt a und b steht aber o und o, c bleibt unverändert, statt d endlich steht $d' = d - \frac{b}{c}e + \frac{a}{c}f$.

Daher sofort:

$$\varDelta = c^2 d'^2 = (dc - be + af)^2$$

$n = 6$ führe auf $n = 4$ zurück u. s. w.

§ 21.

1. Man führe noch ein rechtwinkliges Koordinatensystem der $\xi\eta$ ein, in welcher a die ξ-Achse und die Höhe auf a die η-Achse ist. In diesem System ist $A(0, h)$, $B(q, 0)$ $C(p, 0)$ mit den Bedingungen:

$$q - p = a,\ h^2 + p^2 = b^2,\ h^2 + q^2 = c^2.$$

Die Gleichungen der drei Seiten daher:

$$\eta = 0,\ \frac{\xi}{p} + \frac{\eta}{h} - 1 = 0,\ \frac{\xi}{q} + \frac{\eta}{h} - 1 = 0.$$

Bringt man die linken Seiten auf die Normalform, macht homogen, berücksichtigt, dass x, y, z den Loten selbst proportional sein sollen und beachtet die Vorzeichen, so werden die Gleichungen 3) hier:

$$x = \eta,\quad y = \frac{h\xi + \eta p - hp\zeta}{b},\quad z = \frac{-h\xi - \eta q + hq\zeta}{c}$$

und umgekehrt:

$$\xi = \frac{bqy + pcz}{ha}, \quad \eta = x, \quad \zeta = \frac{ax + by + cz}{ha}.$$

Die Gleichung der unendlich fernen Geraden in rechtwinkligen Koordinaten ist $\zeta = 0$. Im Dreieckssystem daher:

$$ax + by + cz = 0.$$

Die Gleichung der Höhe auf a im rechtwinkligen System ist $\xi = 0$. Im Dreieckssystem daher:

$$bqy + pcz = 0$$

oder nach Einsetzen von p und q:

$$b(a^2 + c^2 - b^2)y - c(b^2 + a^2 - c^2)z = 0.$$

(Man sieht, dass bei Anschreiben aller drei Höhen und addiren identisch $0 = 0$ herauskommt. Sie schneiden sich in einem Punkt.)

Der umbeschriebene Kreis muss (Seite 263) eine Gleichung von der Form haben:

$$\alpha yz + \beta zx + \gamma xy = 0.$$

Durch Einführen der rechtwinkligen Koordinaten und Anwendung der Kriterien der Kreisgleichung findet man zuletzt: $\alpha : \beta : \gamma = a : b : c$, d. h. die gesuchte Gleichung ist:

$$ayz + bzx + cxy = 0.$$

2. $z = 0$ giebt $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$.

$$y = x \cdot \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}}.$$

Schnittpunkte sind daher reell, fallen zusammen, sind imaginär, je nachdem

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \lesseqgtr 0.$$

Wenn $z = 0$ die unendlich ferne Gerade, so wieder die Kriterien des § 18.

3.

$$x_1 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z$$

$$y_1 = +\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z$$

$$z_1 = +\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z.$$

[für $d = -a$, $c = b$ folgt aus c) nach Fallenlassen der Homogeninät, wenn man noch $a = b \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ setzt:

$$x_1 = x \cos\varphi - y \sin\varphi$$
$$y_1 = x \sin\varphi + y \cos\varphi,$$

d. h. die Collinearität geht in Congruenz über, entstanden durch Drehung um Anfangspunkt].

3. Wie auch $F(x, y, z) = 0$ collinear auf sich selbst abgebildet wird, es giebt stets zwei reelle oder zusammenfallende, oder imaginäre sich selbst entsprechende Punkte, deren Verbindungslinie immer reell ist. Sie sei:

$$\varphi(x, y, z) \equiv ax + by + cz = 0.$$

Da nun der Kegelschnitt und die gerade Linie durch die Collineation 3) auf sich selbst abgebildet werden, so folgt:

$$F(x, y, z) \equiv kF(x', y', z'),\ \varphi(x, y, z) \equiv k_1\varphi(x', y', z').$$

Ausser den beiden Punkten giebt es noch einen dritten weder auf der Kurve noch der Geraden liegenden, sich selbst entsprechenden Punkt (welchen?). Für diesen muss sein: $x = \mu x'$, $y = \mu y'$, $z = \mu z'$ und daher durch Einsetzen in die beiden Identitäten und nach Fortheben von $F(x', y', z')$ und $\varphi(x', y', z')$:

$$\mu^2 = k, \quad \mu = k_1, \quad k = k_1^2.$$

Daher ganz allgemein:

$$F(x, y, z) + \lambda(\varphi(x, y, z))^2 \equiv k[F(x', y', z') + \lambda(\varphi(x', y', z'))],$$

d. h. alle Kegelschnitte des Büschels $F(x, y, z) + \lambda(\varphi(x, y, z))^2 = 0$ werden in sich selbst abgebildet. Dieses Büschel besteht aus Kegelschnitten in doppelter Berührung und $\varphi(x, y, z) = 0$ ist nichts anderes als die gemeinsame Berührungssehne.

